Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
Dipl.-Math. Dagmar Roth

SS 2011

Rand- und Eigenwertprobleme
11. Übungsblatt

Aufgabe 39

Es seien $z \in \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}$, $r, d \in \mathbb{R}^+$ sowie $U_1 := B_r(z)$ eine Kugel und $U_2 := \{x \in \mathbb{R}^n : \; a < x_1 < a + d\}$ ein unendlich langer Streifen.

a) Finden Sie die Lösungen $v_i, \; i = 1, 2$ der Randwertprobleme

$$\begin{cases} -\Delta v_i(x) = 1 & \text{in } U_i \\ v_i(x) = 0 & \text{auf } \partial U_i. \end{cases}$$

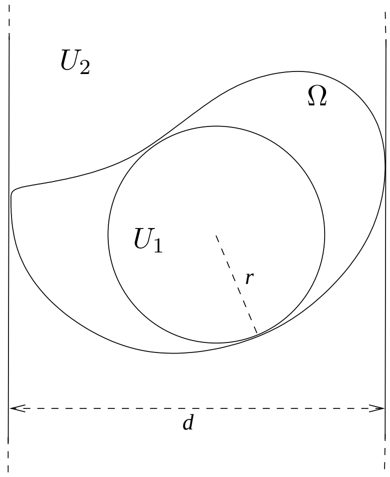
Hinweis: Verwenden Sie Polynome 2. Ordnung als Lösungsansatz.

b) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt mit $U_1 \subset \Omega \subset U_2$ (s. Skizze) und $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ sei eine Lösung des Randwertproblems

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = 1 & \text{in } \Omega \\ u(x) = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Zeigen Sie mit Hilfe des Maximumprinzips: $v_1 \leq u$ in U_1 und $u \leq v_2$ in Ω. Folgern Sie schließlich:

$$\frac{r^2}{2n} \leq \max_{x \in \overline{\Omega}} u(x) \leq \frac{d^2}{8}.$$



Aufgabe 40

Es sei $\Omega = B_1(0) \cap \{x_n > 0\} \subset \mathbb{R}^n$ und $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ eine Lösung des Randwertproblems

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \cap \{x_n = 0\} \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{auf } \partial\Omega \backslash \{x_n = 0\}. \end{cases}$$

Zeigen Sie $u \equiv 0$.

Bitte wenden!

Aufgabe 41

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $u \in C^3(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ eine Lösung von

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\partial_{ij}^2 u(x) = 0,$$

wobei L gleichmäßig elliptisch sei. Für die Koeffizienten gelte $a_{ij} \in C^1(\Omega)$, sowie $\|a_{ij}\|_\infty$, $\|\partial_k a_{ij}\|_\infty < \infty$ $(i, j, k = 1, \ldots, n)$.
Zeigen Sie mit Hilfe des Maximumprinzips die Existenz einer von u unabhängigen Konstanten mit

$$\|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C \left(\|\nabla u\|_{L^\infty(\partial\Omega)} + \|u\|_{L^\infty(\partial\Omega)}\right).$$

Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $v := |\nabla u|^2 + tu^2$ für große $t > 0$ und berechnen Sie Lv. Verwenden Sie $\partial_k Lu = 0$.

Aufgabe 42

Es sei

$$T : l^2 \to l^2, \quad (x_1, x_2, x_3, \ldots) \mapsto (x_2, x_3, x_4, \ldots)$$

der Shift-Operator im l^2. Bestimmen Sie $\sigma_p(T),\ \sigma(T),\ \sigma_p(T^*),\ \sigma(T^*)$.

Besprechung in der Übung am 6.7.2011