Karlsruher Institut für Technologie (KIT) SS 2011
Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
Dipl.-Math. Dagmar Roth

Rand- und Eigenwertprobleme
12. Übungsblatt

Aufgabe 43

Ziel dieser Aufgabe ist die Berechnung der Eigenwerte und -funktionen von $-\Delta$ mit homogenen Dirichlet-Randwerten auf der dreidimensionalen Einheitskugel $\Omega = B_1(0) \subset \mathbb{R}^3$.
Sie dürfen in dieser Aufgabe ohne Beweis verwenden, dass Lösungen der assoziierten Legendre-Differentialgleichung

$$\left(\left(1-x^2\right) y'\right)' + \left(\gamma - \frac{m^2}{1-x^2}\right) y = 0 \quad (m \in \mathbb{N}_0)$$

im Intervall $[-1,1]$ mit $|y(\pm 1)| < \infty$ nur dann existieren, wenn $\gamma = l(l+1)$ mit $l \in \mathbb{N}_0$ und $m \leq l$. In diesem Fall sind die Lösungen gegeben durch die assoziierten Legendre-Funktionen

$$P_l^{(m)}(x) = (-1)^m \left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x),$$

wobei

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} \left(x^2-1\right)^l$$

das l-te Legendre-Polynom bezeichnet.
Gehen Sie nun folgendermaßen vor:

a) Bestimmen Sie die Darstellung des Laplace-Operators in Kugelkoordinaten.

b) Verwenden Sie für die Eigenfunktionen ψ den Ansatz $\psi(r,\varphi,\theta) = u(r)v(\varphi)w(\theta)$. Dieser führt auf je eine Differentialgleichung für die Funktionen u, v und w.

c) Für die Lösung der Differentialgleichungen aus b) sind die Substitutionen $u(r) = \frac{1}{\sqrt{r}} z(r)$ und $\cos(\theta) = s$ hilfreich.

d) Sie müssen nicht beweisen, dass die durch den Separationsansatz gefundenen Eigenfunktionen tatsächlich eine ONB von $L^2(\Omega)$ bilden.

Bitte wenden!

Aufgabe 44

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte offene Menge und $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ eine L^2-ONB aus Dirichlet-Eigenfunktionen des Operators $-\Delta$. Weiter sei $\lambda \in \mathbb{R}$.
Welche Bedingungen muss $f \in L^2(\Omega)$ erfülllen, damit sich die Lösung $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ des Eigenwertproblems

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda u + f \quad \text{in } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

darstellen lässt durch $u = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \varphi_i$ mit $\alpha_i \in \mathbb{R},\ i \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie in diesem Fall $\alpha_i,\ i \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 45

Für $R > 0$ sei $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3 :\ R < |x| < 2R\}$ die offene Kugelschale mit Radien $R, 2R$ in $\mathbb{R}^3$.
Bestimmen Sie alle radialsymmetrischen Dirichlet-Eigenfunktionen des Problems

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda u \quad \text{in } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

und berechnen Sie die zugehörigen Eigenwerte.
Hinweis: Versuchen Sie den Ansatz $w(r) = r\tilde{u}(r)$ wobei $\tilde{u}(r) = u(x)$ und $r = |x|$.

Besprechung in der Übung am 13.7.2011