Karlsruher Institut für Technologie (KIT) SS 2011
Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
Dipl.-Math. Dagmar Roth

Rand- und Eigenwertprobleme
13. Übungsblatt

Aufgabe 46

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet und λ_1 der erste Dirichlet-Eigenwert von $-\Delta$ mit zugehöriger Eigenfunktion $\varphi_1 \in W_0^{1,2}(\Omega)$. In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass λ_1 ein einfacher Eigenwert ist, d.h. der zugehörige Eigenraum hat Dimension 1, und dass die einzige Eigenfunktion keine Nullstellen in Ω besitzt. Sie dürfen hierbei ohne Beweis verwenden, dass für jede Eigenfunktion $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ von $-\Delta$ auf Ω gilt: $v \in C^\infty(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.
Im Folgenden sei

$$R(u) = \frac{\|\nabla u\|_2^2}{\|u\|_2^2}, \quad u \in W_0^{1,2}(\Omega)\backslash\{0\}$$

der Rayleighquotient von u.

a) Zeigen Sie, dass jeder Minimierer $\tilde{u} \in W_0^{1,2}(\Omega)$ des Rayleighquotienten, d.h. jede Funktion $\tilde{u} \in W_0^{1,2}(\Omega)$ mit $R(\tilde{u}) = \lambda_1$, eine Eigenfunktion von $-\Delta$ zum Eigenwert λ_1 ist.

   Hinweis: Die Funktion $t \mapsto R(\tilde{u} + t\varphi)$ besitzt ein lokales Minimum in $t = 0$ für jedes $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

b) Beweisen Sie: Ist $\tilde{u}$ eine Eigenfunktion von $-\Delta$ zum Eigenwert λ_1, so gilt dies auch für $|\tilde{u}|$.

c) Es sei $\tilde{u}$ eine Eigenfunktion von $-\Delta$ zum Eigenwert λ_1. Wenden Sie das starke Maximumprinzip auf $|\tilde{u}|$ an um zu zeigen, dass $\tilde{u}$ in Ω keine Nullstellen besitzt.

d) Zeigen Sie, dass keine zwei linear unabhängigen Eigenfunktionen von $-\Delta$ zum Eigenwert λ_1 existieren.

Bitte wenden!

Aufgabe 47

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a > b$ und

$$E := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 < 1 \right\}$$

eine Ellipse. Finden Sie optimale Einschließungen $\lambda_1(E) \in [\lambda_1(\Omega_1), \lambda_1(\Omega_2)]$ für den ersten Dirichlet-Eigenwert $\lambda_1(E)$ von $-\Delta$ auf E für Gebiete $\Omega_2 \subset E \subset \Omega_1$ mit

a) Ω_1, Ω_2 sind Kreise,

b) Ω_1, Ω_2 sind Rechtecke.

Aufgabe 48

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte offene Menge und $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ die Dirichlet-Eigenwerte von $-\Delta$ auf Ω mit einer zugehörigen L^2-ONB aus Eigenfunktionen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$. Sei $u \in W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$.

a) Zeigen Sie die Existenz von Koeffizienten $\alpha_i \in \mathbb{R}$ mit

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \varphi_i, \quad -\Delta u = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \alpha_i \varphi_i.$$

b) Seien $\mu \in \mathbb{R}$ und $\delta \geq 0$ gegeben durch

$$\delta = \frac{\|\Delta u + \mu u\|_2}{\|u\|_2}, \quad (u \neq 0).$$

Zeigen Sie, dass das Intervall $[\mu - \delta, \mu + \delta]$ mindestens einen Eigenwert λ_i enthält.