Karlsruher Institut für Technologie (KIT) SS 2011
Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
Dipl.-Math. Dagmar Roth

Rand- und Eigenwertprobleme
2. Übungsblatt

Aufgabe 4

Seien $a_1, a_0, g \in C[a, b]$. Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung

$$u'' + a_1(x)u' + a_0(x)u = g(x), \qquad a \le x \le b$$

in die Form

$$-\left(p(x)u'\right)' + q(x)u = f(x), \qquad a \le x \le b$$

überführt werden kann, wobei $p \in C^1[a, b]$, $p > 0$ und $q, f \in C[a, b]$.

Aufgabe 5

Betrachten Sie das folgende Sturm-Liouvillesche Randwertpoblem

$$(*) \quad \left\{ \begin{array}{rcl} -(p(x)u')' + q(x)u &=& r(x) \quad \text{in } [0,1] \\ \alpha_1 u'(0) + \alpha_2 p(0)u(0) &=& \eta_1 \\ \beta_1 u'(1) + \beta_2 p(1)u(1) &=& \eta_2 \end{array} \right.$$

wobei $p \in C^1[0, 1]$, $q \in C[0, 1], p(x) > 0$, $q(x) \ge 0$ in $[0, 1]$ und $\alpha_1 \le 0$, $\alpha_2, \beta_1, \beta_2 \ge 0$, $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 > 0, \beta_1^2 + \beta_2^2 > 0$.
Zeigen Sie: Ist $q(x) \neq 0$ für ein $x \in [0, 1]$ oder gilt $\alpha_2 + \beta_2 > 0$, so besitzt das Randwertproblem $(*)$ für alle $r \in C[0, 1]$ und $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}$ genau eine Lösung.

Aufgabe 6

Es sei $h \in C[0, 1]$. Zeigen Sie, dass das Randwertproblem

$$-u'' = g(x) \arctan(u + h(x)) \quad \text{in } [0, 1], \qquad u(0) = u(1) = 0$$

für jede Funktion $g \in C[0, 1]$, die in $[0, 1]$ der Ungleichung $|g(x)| < \pi^2$ genügt, genau eine Lösung besitzt.

Aufgabe 7

Bestimmen Sie jeweils die Green'sche Funktion für die gegebenen Randwertprobleme:

a) $u'' = 0$ in $[0, 1]$, $u'(0) = u(1) = 0$

b) $-u'' + \lambda u = 0$ in $[0, 1]$, $u(0) = u(1) = 0$ wobei $\lambda < 0$, $\lambda \neq -n^2\pi^2$ $(n \in \mathbb{N})$

c) $-u'' - \frac{1}{4x^2}u = 0$, in $[1, 2]$, $u(1) = u(2) = 0$
Hinweis: Substituieren Sie $x = e^t$.

Besprechung in der Übung am 27.4.2011