Karlsruher Institut für Technologie (KIT) SS 2011
Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
Dipl.-Math. Dagmar Roth

Rand- und Eigenwertprobleme
3. Übungsblatt

Aufgabe 8

Es sei $B^* = \left\{ u \in C[a,b] : \|u\|^* := \sup\limits_{a<x<b} \frac{|u(x)|}{\sin\left(\frac{\pi(x-a)}{b-a}\right)} < \infty \right\}$. Zeigen Sie, dass die Menge B^* versehen mit der Norm $\|\cdot\|^*$ einen Banachraum bildet.

Aufgabe 9

Betrachten Sie das folgende inhomogene Randwertproblem:

$$(*) \quad \left\{ \begin{array}{rcl} Lu := -(p(x)u')' + q(x)u &=& g(x) \quad \text{in } [a,b] \\ R_1 u := \alpha_1 u(a) + \alpha_2 p(a) u'(a) &=& \eta_1 \\ R_2 u := \beta_1 u(b) + \beta_2 p(b) u'(b) &=& \eta_2. \end{array} \right.$$

Es gelte die Voraussetzung (V) aus der Vorlesung. Finden Sie eine geeignete Funktion w, so dass sich $(*)$ durch die Transformation $u = v + w$ auf das halbhomogene Problem

$$Lv = \tilde{g} \text{ in } [a,b],\ R_1 v = 0,\ R_2 v = 0$$

mit $\tilde{g} \in C[a,b]$ zurückführen lässt.

Aufgabe 10

Es sei $f \in C\left([a,b] \times \mathbb{R}\right)$. Betrachten Sie das nichtlineare Randwertproblem

$$-u'' = f(x,u) \quad \text{in } [a,b],\ u(a) = u'(b) = 0$$

und geben Sie eine hinreichende, möglichst scharfe Bedingung für die eindeutige Lösbarkeit des Problems an.

Aufgabe 11

Sei $f \in C[0,1]$. Zeigen Sie, dass für die Lösung des Randwertproblems

$$-u'' = f(x) \ \text{ in } [0,1],\ u(0) = u(1) = 0$$

gilt:

$$\|u\|_\infty \le \frac{1}{8}\|f\|_\infty, \quad \|u'\|_\infty \le \frac{1}{2}\|f\|_\infty.$$

Besprechung in der Übung am 4.5.2011