Karlsruher Institut für Technologie (KIT) SS 2011
Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
Dipl.-Math. Dagmar Roth

Rand- und Eigenwertprobleme
4. Übungsblatt

Aufgabe 12

Es seien $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ und $|\beta| + |\gamma| > 0$. Entscheiden Sie, ob das Randwertproblem

$$u'' + 2\alpha u' + \alpha^2 u = f \quad u(0) = 0,\ \beta u(1) + \gamma u'(1) = 0$$

für alle $f \in C[0,1]$ eindeutig lösbar ist. Geben Sie im Fall $\beta = 0$ ggf. explizite Funktionen $f \in C[0,1]$ an, für die das Problem mehrere oder keine Lösung besitzt.

Aufgabe 13

Es sei

$$\begin{aligned} \Omega &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x > 0,\ y^2 + z^2 > e^{-1/x}\} \\ \Gamma_0 &= \{(x,y,z) \in \partial\Omega :\ x > 0,\ y^2 + z^2 = e^{-1/x}\} \\ \Gamma_1 &= \{(x,y,z) \in \partial\Omega :\ x = 0,\ y^2 + z^2 > 0\}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie: Die Funktion

$$v(x,y,z) = \begin{cases} 1 & y = z = 0 \\ -x\log(y^2 + z^2) & \text{sonst} \end{cases}$$

löst das Randwertproblem

$$-\Delta u = 0 \text{ in } \Omega,\ u = 1 \text{ auf } \Gamma_0,\ u = 0 \text{ auf } \Gamma_1$$

aber $u \notin C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

Aufgabe 14

a) Sei $\alpha > 1$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Zeigen Sie, dass jede α-Hölderstetige Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$ konstant ist.

b) Sei $\alpha \in (0,1]$. Zeigen Sie, dass die Funktion $x \mapsto |x|^\alpha$ α-Hölderstetig auf $\mathbb{R}^n$ ist.

c) Sei $0 < \beta \leq 1 < \gamma$. Zeigen Sie, dass die Funktion $x \mapsto |x|^\gamma$ nicht β-Hölderstetig auf $\mathbb{R}^n$ aber β-Hölderstetig auf jeder kompakten Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist.

d) Beweisen Sie: Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, so gilt $C^{0,\beta}(\overline{\Omega}) \subset C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ für alle $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$. Hierbei ist

$$C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) = \{u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R},\ u \text{ ist } \alpha\text{-Hölderstetig auf } \overline{\Omega}\}.$$

Aufgabe 15

Sei $B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ die n-dimensionale Einheitskugel sowie $f \in C(\overline{B_1(0)}),\ g \in C(\partial B_1(0))$.

a) Zeigen Sie, dass die Greensche Funktion für $B_1(0)$ positiv in $B_1(0)$ ist.

b) Beweisen Sie, dass für jede Lösung $u \in C^2(\overline{B_1(0)})$ des Problems

$$(*) \qquad \begin{cases} -\Delta u = f & \text{in} \quad B_1(0) \\ u = g & \text{auf} \quad \partial B_1(0) \end{cases}$$

mit $f, g \geq 0$ gilt: $u \geq 0$.

c) Zeigen Sie, dass das Problem $(*)$ höchstens eine Lösung in $C^2(\overline{B_1(0)})$ besitzt.

Besprechung in der Übung am 11.5.2011