Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
Dipl.-Math. Dagmar Roth

SS 2011

Rand- und Eigenwertprobleme
5. Übungsblatt

Aufgabe 16

a) Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $0 \in \Omega$. Für welche $\alpha \in \mathbb{R},\ p \in [1, \infty]$ ist die Funktion $f(x) = |x|^\alpha$ ein Element von $W^{1,p}(\Omega)$?

b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R},\ p \in [1, \infty]$ ist die Funktion $g(x) = (1 + |x|^2)^\alpha$ ein Element von $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$?
Hinweis: Ist $h \in C^1(\mathbb{R}^n)$, so stimmen die klassischen ersten Ableitungen mit den ersten schwachen Ableitungen überein.

Aufgabe 17

Zeigen Sie, dass die Funktion $u(x, y) = |x| + |y|$ auf der Einheitskreisscheibe schwache erste Ableitungen besitzt und bestimmen Sie diese.

Aufgabe 18

Zeigen Sie, dass die Funktion $u(x, y) = \operatorname{sign}(x) + \operatorname{sign}(y)$ auf $\mathbb{R}^2$ keine schwachen Ableitungen der Ordnung 1 besitzt, aber die zweite schwache Ableitung $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ existiert.

Aufgabe 19

Zeigen Sie, dass die erste schwache Ableitung einer stetigen, stückweise stetig differenzierbaren Funktion $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ existiert.

Aufgabe 20

Beweisen Sie:

a) $C[0, 1] \not\subset W^{1,2}(0, 1)$.

b) Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen, so gilt $W^{1,2}(\Omega) \not\subset C(\overline{\Omega})$.
Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $u(x, y) = \log \left| \log \left(\sqrt{x^2 + y^2} \right) \right|$.

Besprechung in der Übung am 18.5.2011