Karlsruher Institut für Technologie (KIT) SS 2011
Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
Dipl.-Math. Dagmar Roth

Rand- und Eigenwertprobleme
6. Übungsblatt

Aufgabe 21

Es sei $u(x) = 1 - |x|$ für $x \in I := (-1, 1)$. Zeigen Sie:

a) $u \in W^{1,\infty}(I)$.

b) $u \in W_0^{1,p}(I)$ für alle $p \in [1, \infty)$, aber $u \notin W_0^{1,\infty}(I)$.

c) u ist keine schwache Lösung des Randwertproblems

$$u'' = 0 \quad \text{in} \quad I, \qquad u(-1) = u(1) = 0,$$

obwohl u die Randbedingungen erfüllt und die Differentialgleichung fast überall löst.

Aufgabe 22

Sei $\Omega \in \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $c \in L^\infty(\Omega),\ c \geq 0,\ f \in L^2(\Omega)$.

a) Zeigen Sie, dass die Norm $|||u||| := \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 + c(x)u^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$ äquivalent zur üblichen $W_0^{1,2}$-Norm ist.

b) Zeigen Sie, dass das Randwertproblem

$$-\Delta u + c(x)u = f \quad \text{in} \quad \Omega, \qquad u = 0 \quad \text{auf} \quad \partial\Omega$$

eine eindeutige schwache Lösung in $W_0^{1,2}(\Omega)$ besitzt.

Aufgabe 23

Es sei $u \in W_0^{1,2}(0, 1)$. Beweisen Sie, dass eine Funktion $\tilde{u} \in C[0, 1]$ existiert, so dass $u = \tilde{u}$ fast überall in $(0, 1)$ gilt.
Hinweis: Zeigen Sie für $u \in C^1[0, 1]$ die Ungleichung

$$|u(x) - u(y)| \leq |x - y|^{\frac{1}{2}} \|u'\|_2 \qquad (x, y \in (0, 1))$$

und verwenden Sie den Satz von Arzelà-Ascoli.

Besprechung in der Übung am 25.5.2011