Karlsruher Institut für Technologie (KIT) SS 2011
Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
Dipl.-Math. Dagmar Roth

Rand- und Eigenwertprobleme
7. Übungsblatt

Aufgabe 24

Es sei V ein reeller Vektorraum, F ein lineares Funktional auf V und B eine symmetrische und positiv definite Bilinearform auf V, d.h.

$$\begin{array}{ll} B[u,v]=B[v,u] & \text{für alle } u,v\in V \\ B[u,u]>0 & \text{für alle } u\in V\backslash\{0\}. \end{array}$$

Das Funktional $J : V \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $J[u] = \frac{1}{2}B[u,u] - F[u]$. Zeigen Sie:
$J[u]$ nimmt genau dann sein Minimum für $u_0 \in V$ an, wenn gilt $B[u_0, v] = F[v]$ für alle $v \in V$.

Aufgabe 25

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $L = -\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\partial_{ij}^2 + \sum\limits_{i=1}^{n} b_i(x)\partial_i + c(x)$ ein linearer Differentialoperator in Nichtdivergenzform mit Koeffizienten $a_{ij} \in C^1(\Omega)$, $b_i, c \in C(\Omega)$ $(i, j = 1, \dots, n)$. Zeigen Sie, dass der Operator auch in Divergenzform geschrieben werden kann.

Aufgabe 26

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Weiter seien $a_{ij}, c \in L^\infty(\Omega)$ und $b_i \in C^1(\Omega)$ $(i, j = 1, \dots, n)$ gegeben mit

(i) $2c(x) - \sum\limits_{i=1}^{n} \partial_i b_i(x) \geq 0$ für fast alle $x \in \Omega$

(ii) Es existiert ein $\lambda > 0$, so dass $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ und $x \in \Omega$.

Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Lax-Milgram, dass das Randwertproblem

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\sum\limits_{i,j=1}^{n} \partial_i\left(a_{ij}(x)\partial_j u\right) + \sum\limits_{i=1}^{n} b_i(x)\partial_i u + c(x)u & = & f & \text{in } \Omega \\ u & = & 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{array} \right.$$

für jedes $f \in L^2(\Omega)$ eine eindeutige schwache Lösung $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ besitzt.

Bitte wenden!

Aufgabe 27

Es sei $(a_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine Doppelfolge mit $\sum\limits_{i,j=1}^{\infty} a_{ij}^2 < \infty$. Weiterhin sei für alle $N \in \mathbb{N}$ die Matrix $A_N := (a_{ij})_{1\le i,j\le N}$ positiv definit. Zeigen Sie, dass für jedes $f = (f_i)_{i\in\mathbb{N}} \in l_2$ die Gleichung

$$u_i + \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} u_j = f_i \quad \text{für alle} \;\; i \in \mathbb{N}$$

eine eindeutige Lösung $u = (u_i)_{i\in\mathbb{N}} \in l_2$ besitzt.
Hinweis: $l_2 = \left\{ (x_1, x_2, \dots) \mid x_i \in \mathbb{R}\ (i = 1, 2, \dots),\ \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty \right\}$ und $\langle x, y\rangle_{l^2} = \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i y_i$ für $x, y \in l^2$. Sie können ohne Beweis verwenden, dass $(l_2, \langle\cdot,\cdot\rangle_{l^2})$ ein Hilbertraum ist.

Besprechung in der Übung am 1.6.2011