Institut für Analysis
Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

Prof. Dr. Wolfgang Reichel

Rand- und Eigenwertprobleme – Sommersemester 2011
Handout zur Funktionalanalysis/Hilberträume

Ref.: W. Rudin, Real and Complex Analysis, 3^{rd} Ed., McGraw-Hill, 1987, Chapter 4.

Definition F.1 (Beschränkte, kompakte lineare Operatoren) *Seien $(X, \|\cdot\|)$ und $(Y, |||\cdot|||)$ normierte Räume. Ein linearer Operator $A : X \to Y$ heißt*

(i) beschränkt, falls

$$\|A\| := \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{|||Ax|||}{\|x\|} < \infty.$$

Im Fall $Y = \mathbb{R}$ heißen beschränkte lineare Operatoren auch beschränkte lineare **Funktionale**. *Ferner gilt: ein linearer Operator ist stetig genau dann, wenn er beschränkt ist.*

(ii) kompakt, falls für jede beschränkte Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in X die Bildfolge $(Ax_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in Y eine konvergente Teilfolge enthält.

Definition F.2 (Hilberträume) *Sei H ein reeller Vektorraum mit Innenprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$, d.h.*

(i) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$,

(ii) $\langle x, x\rangle \geq 0$ *und* $= 0$ *dann und nur dann wenn* $x = 0$,

(iii) $\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\langle x, z\rangle + \beta\langle y, z\rangle$.

Dann wird durch

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

eine Norm auf H definiert. Ist H bezüglich dieser Norm vollständig, dann heißt $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ Hilbertraum.

Definition F.3 (Orthogonalität) *Sei $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein Innenprodukt auf dem reellen Vektorraum H und sei $V \subset H$.*

(i) $x \perp y :\Leftrightarrow \langle x, y\rangle = 0$,

(ii) $x \perp V :\Leftrightarrow x \perp v$ *für alle* $v \in V$,

(iii) $V^\perp := \{x \in H : x \perp V\}$.

Theorem F.4 (Abstandsminimierer) *Sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum und sei $V \subset H$ ein abgeschlossener Unterverktorraum. Dann gilt:*

(i) $\forall x \in H$ *existiert genau ein* $v_0 \in V$ *mit*

$$\|x - v_0\| = \operatorname{dist}(x, V) = \inf_{v \in V} \|x - v\|.$$

Außerdem gilt $x - v_0 \perp V$.

(ii) $H = V \oplus V^\perp$.

Theorem F.5 (Riesz'scher Darstellungssatz) *Sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein reeller Hilbertraum und sei $\phi : H \to \mathbb{R}$ ein beschränktes lineares Funktional. Dann gibt es genau ein Element $u \in H$ mit*

$$\phi(x) = \langle u, x\rangle \text{ für alle } x \in H.$$

Außerdem gilt: $\|\phi\| = \|u\|$.

Definition F.6 (Schwache Konvergenz) *Sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein reeller Hilbertraum. Eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in H heißt schwach konvergent gegen $x \in H$, falls gilt:*

$$\lim_{k\to\infty} \langle x_k, y\rangle = \langle x, y\rangle \text{ für alle } y \in H.$$

Man schreibt $x_k \rightharpoonup x$ für $k \to \infty$ für **schwach konvergente** *Folgen. Im Gegensatz dazu schreibt man, $x_k \to x$ für $k \to \infty$ für* **stark konvergente** *(Norm-konvergente) Folgen, d.h. $\|x_k - x\| \to 0$ für $k \to \infty$.*

Lemma F.7 (Beziehung zwischen schwacher und starker Konvergenz) *Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge im Hilbertraum H und sei $x \in H$.*

(i) Falls $x_k \to x$ für $k \to \infty$ dann folgt $x_k \rightharpoonup x$ für $k \to \infty$. In unendlichdimensionalen Hilberträumen ist die Umkehrung im allgemeinen falsch.

(ii) Es gilt die folgende Äquivalenz:

$$x_k \to x \text{ für } k \to \infty \Longleftrightarrow x_k \rightharpoonup x \text{ und } \|x_k\| \to \|x\| \text{ für } k \to \infty.$$

Theorem F.8 (Banach-Alaoglu für Hilberträume) *Sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein reeller Hilbertraum und sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in H.*

(i) Falls $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ schwach gegen $x \in H$ konvergiert, dann ist die Folge $(\|x_k\|)_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt und es gilt

$$\|x\| \leq \liminf_{k\in\mathbb{N}} \|x_k\| \quad \text{(schwache Unterhalbstetigkeit der Norm).}$$

(ii) Ist $(\|x_k\|)_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt, so existiert eine schwach konvergente Teilfolge.

Definition F.9 (Separable Räume) *Ein Banachraum $(X, \|\cdot\|)$ heißt separabel, falls es eine abzählbare Menge $Z = \{z_1, z_2, z_3, \ldots\}$, $Z \subset X$ gibt mit $\overline{Z} = X$.*

Beispiele: $L^p(\Omega), W^{k,p}(\Omega)$ sind separabel, falls $1 \le p < \infty$. $L^\infty(\Omega), W^{k,\infty}(\Omega)$ sind nicht separabel, falls Ω offen und nichtleer ist.

Definition F.10 (Orthonormalsystem, Orthonormalbasis) *Sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein reeller, unendlichdimensionaler Hilbertraum. Eine Menge $B = \{u_i : i \in \mathbb{N}\} \subset H$ heißt Orthonormalsystem, falls gilt*

$$\langle u_i, u_j \rangle = \delta_{ij}.$$

Gilt zusätzlich

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} \langle u, u_i \rangle u_i \quad \text{für alle } u \in H,$$

dann heißt B Orthonormalbasis.

Theorem F.11 (Existenz von Orthonormalbasen) *Sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein reeller separabler Hilbertraum. Dann besitzt H eine Orthonormalbasis.*

Theorem F.12 (Konvergenz der abstrakten Fourier-Reihe) *Sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein reeller Hilbertraum und sei $B = \{u_i : i \in \mathbb{N}\}$ ein Orthonormalsystem. Dann ist für jedes $u \in H$ die Reihe*

$$\hat{u} := \sum_{i=1}^{\infty} \langle u, u_i \rangle u_i \quad \text{(abstrakte Fourier-Reihe)}$$

konvergent.

Beweis: Sei $u \in H$ fest. Für $k \in \mathbb{N}$ sei $\hat{u}_k := \sum_{i=1}^{k} \langle u, u_i \rangle u_i$. Dann gilt $\|\hat{u}_k\|^2 = \sum_{i=1}^{k} |\langle u, u_i \rangle|^2$ und

Besselsche Gleichung: $$\|u - \hat{u}_k\|^2 = \|u\|^2 - \sum_{i=1}^{k} |\langle u, u_i \rangle|^2 = \|u\|^2 - \|\hat{u}_k\|^2.$$

Daraus folgt

Besselsche Ungleichung: $$\sum_{i=1}^{\infty} |\langle u, u_i \rangle|^2 \le \|u\|^2.$$

Für $k > l$ gilt

$$\|\hat{u}_k - \hat{u}_l\|^2 = \| \sum_{i=l+1}^{k} \langle u, u_i \rangle u_i \|^2 = \sum_{i=l+1}^{k} |\langle u, u_i \rangle|^2 < \epsilon \text{ mit } k > l \ge l_0(\epsilon)$$

aufgrund der Besselschen Ungleichung. Also ist $(\hat{u}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge und somit konvergent. $\square$