Seien $(H, \langle \cdot, \cdot\cdot \rangle)$ ein komplexer Hilbertraum und $A : H \to H$ linear, stetig und selbstadjungiert.
Behauptung. Es gilt $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$.

Beweis. Sei $\lambda \in \sigma_p(A)$. Dann gibt es ein $x \in H \backslash \{0\}$ mit $Ax = \lambda x$ und es gilt

$$\lambda \langle x, x \rangle = \langle Ax, x \rangle = \langle x, Ax \rangle = \overline{\lambda} \langle x, x \rangle.$$

Da $x \neq 0$ folgt $\lambda \in \mathbb{R}$, also gilt $\sigma_p(A) \subseteq \mathbb{R}$.
Sei nun $\lambda \in \sigma(A)$. Wir unterscheiden zwei Fälle.

1. *Es gelte* $\overline{(\lambda I - A)(H)} \neq H$.

   Dann existiert $y \in \overline{(\lambda I - A)(H)}^{\perp} \backslash \{0\}$ und somit gilt für alle $x \in H$

   $$0 = \langle y, (\lambda I - A)x \rangle = \langle (\overline{\lambda} I - A)y, x \rangle,$$

   d.h. $\overline{\lambda} \in \sigma_p(A) \subseteq \mathbb{R}$. In diesem Fall ist also $\lambda \in \mathbb{R}$.

2. *Es gelte* $\overline{(\lambda I - A)(H)} = H$.

   Wähle $z \notin (\lambda I - A)(H)$. Dann existiert eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in H mit der Eigenschaft $(\lambda I - A)x_n \to z$ für $n \to \infty$. Schreibe $\lambda = \alpha + i\beta$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Damit berechnen wir für $x \in H$:

   $$\begin{aligned} \|(\lambda I - A)x\|^2 &= \langle (\alpha I - A)x + i\beta x, (\alpha I - A)x + i\beta x \rangle \\ &= \|(\alpha I - A)x\|^2 + 2\mathrm{Re}\left(i\alpha\beta\|x\|^2 - i\beta\langle Ax, x\rangle\right) + |\beta|^2\|x\|^2 \\ &= \|(\alpha I - A)x\|^2 + |\beta|^2\|x\|^2 \geq |\beta|^2\|x\|^2, \end{aligned}$$

   wobei wir $\langle Ay, y \rangle \in \mathbb{R}$ verwendet haben.

   Annahme: $\beta \neq 0$. Setze $y_n := (\lambda I - A)x_n$, $n \in \mathbb{N}$. Da $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert und $\|y_n - y_m\| \geq |\beta|^2\|x_n - x_m\|^2$ gilt, ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge, also konvergent mit Grenzwert $x_0 \in H$. Da A stetig ist, folgt $(\lambda I - A)x_0 = z$, dies ist ein Widerspruch zur Wahl von z. Damit ist die Annahme widerlegt und auch in diesem Fall gilt $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\square$