Institut für Analysis
Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

Prof. Dr. Wolfgang Reichel

Rand- und Eigenwertprobleme – Sommersemester 2019
Handout zur Funktionalanalysis/Hilberträume

Ref.: W. Rudin, Real and Complex Analysis, 3^{rd} Ed., McGraw-Hill, 1987, Chapter 4.

Definition F.1 (Beschränkte lineare Operatoren) *Seien $(X, \|\cdot\|)$ und $(Y, |||\cdot|||)$ normierte Räume. Ein linearer Operator $A : X \to Y$ heißt beschränkt, falls*

$$\|A\| := \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{|||Ax|||}{\|x\|} < \infty.$$

Im Fall $Y = \mathbb{R}$ heißen beschränkte lineare Operatoren auch beschränkte lineare **Funktionale***. Ferner gilt: ein linearer Operator ist stetig genau dann, wenn er beschränkt ist.*

Definition F.2 (Hilberträume) *Sei H ein reeller Vektorraum mit Innenprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$, d.h.*

(i) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ *für alle* $x, y \in H$,

(ii) für alle $x \in H$ *gilt* $\langle x, x \rangle \geq 0$ *und* $\langle x, x \rangle = 0$ *genau dann wenn* $x = 0$,

(iii) $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$ *für alle* $x, y, z \in H$ *und für alle* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Dann wird durch

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

eine Norm auf H definiert. Ist H bezüglich dieser Norm vollständig, dann heißt $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ Hilbertraum.

Definition F.3 (Orthogonalität) *Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Innenprodukt auf dem reellen Vektorraum H und sei $V \subset H$.*

(i) $x \perp y :\Leftrightarrow \langle x, y \rangle = 0$,

(ii) $x \perp V :\Leftrightarrow x \perp v$ *für alle* $v \in V$,

(iii) $V^\perp := \{x \in H : x \perp V\}$.

Theorem F.4 (Abstandsminimierer) *Sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum und sei $V \subset H$ ein abgeschlossener Unterverktorraum. Dann gilt:*

(i) $\forall x \in H$ *existiert genau ein* $v_0 \in V$ *mit*

$$\|x - v_0\| = \operatorname{dist}(x, V) = \inf_{v \in V} \|x - v\|.$$

Außerdem gilt $x - v_0 \perp V$.

(ii) $H = V \oplus V^\perp$.

Theorem F.5 (Riesz'scher Darstellungssatz) *Sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein reeller Hilbertraum und sei $\phi : H \to \mathbb{R}$ ein beschränktes lineares Funktional. Dann gibt es genau ein Element $u \in H$ mit*

$$\phi(x) = \langle u, x\rangle \text{ für alle } x \in H.$$

Außerdem gilt: $\|\phi\| = \|u\|$.

Definition F.6 (Separable Räume) *Ein Banachraum $(X, \|\cdot\|)$ heißt separabel, falls es eine abzählbare Menge $Z = \{z_1, z_2, z_3, \ldots\} \subset X$ gibt mit $\overline{Z} = X$.*

Beispiele: $L^p(\Omega), W^{k,p}(\Omega)$ sind separabel, falls $1 \leq p < \infty$. $L^\infty(\Omega), W^{k,\infty}(\Omega)$ sind nicht separabel, falls Ω offen und nichtleer ist.

Definition F.7 (Orthonormalsystem) *Sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein reeller, unendlichdimensionaler Hilbertraum. Eine Menge $B = \{u_i : i \in \mathbb{N}\} \subset H$ heißt Orthonormalsystem, falls gilt*

$$\langle u_i, u_j\rangle = \delta_{ij} \quad \forall i, j \in \mathbb{N}.$$

Theorem F.8 (Konvergenz der abstrakten Fourier-Reihe) *Sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein reeller Hilbertraum und sei $B = \{u_i : i \in \mathbb{N}\}$ ein Orthonormalsystem. Dann ist für jedes $u \in H$ die Reihe*

$$\hat{u} := \sum_{i=1}^{\infty} \langle u, u_i\rangle u_i \quad \text{(abstrakte Fourier-Reihe)}$$

konvergent.

Definition F.9 (Orthonormalbasis) *Sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein reeller, unendlichdimensionaler Hilbertraum. Gilt für ein Orthonormalsystem $B = \{u_i : i \in \mathbb{N}\}$*

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} \langle u, u_i\rangle u_i \quad \text{für alle } u \in H,$$

dann heißt B Orthonormalbasis.

Theorem F.10 (Existenz von Orthonormalbasen) *Sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein reeller separabler Hilbertraum. Dann besitzt H eine Orthonormalbasis.*