Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
Daniela Maier, M.Sc.

SS 2019
24.4.2019

Rand- und Eigenwertprobleme

1. Übungsblatt

Aufgabe 1

Sei $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ eine symmetrische, positiv definite Matrix. Betrachten Sie den Operator

$$L = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Bestimmen Sie eine Matrix $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$, so dass für beliebiges $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ und

$$v(y) := u(x) \text{ mit } y := Mx,$$

gilt

$$(Lu)(x) = (-\Delta v)(y).$$

Aufgabe 2

Es seien $n \geq 2$ und $g\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$ stetig. Die Koeffizienten

$$a_{ij}(x) = \delta_{ij} + g(|x|)\frac{x_i x_j}{|x|^2} \text{ für } x \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\} \text{ und } i,j = 1,\dots,n$$

definieren einen Operator

$$L = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung $Lu = 0$ genau dann eine radialsymmetrische Lösung $0 \not\equiv u \in C^2(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$ hat, wenn die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{v''(r)}{v'(r)} = \frac{1-n}{r(1+g(r))}$$

eine nichttriviale Lösung $v\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ besitzt.
Berechnen Sie ferner u im Fall $g(r) \equiv c > 0$. Für alle Fans der binomischen Summenformel: Bestimmen Sie u, falls $g(r) = r$.

— bitte wenden —

Aufgabe 3

Es seien die Masse $m > 0$ und das Potential $V \in L^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ gegeben, sowie $\hbar = \frac{h}{2\pi} > 0$ das reduzierte Plancksche Wirkungsquantum.

(a) Seien $u, v \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie, dass

$$\int_{\mathbb{R}^n} \overline{u(x)} \Delta v(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\Delta u(x)} v(x)\, dx. \tag{1}$$

Diese Aussage gilt auch für Funktionen $u, v \in C^2(\mathbb{R}^n)$ mit $u,\ \Delta u,\ v,\ \Delta v \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

(b) Sei nun $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times (0,\infty), \mathbb{C})$ eine Lösung der Schrödinger-Gleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} u(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta u(x,t) + V(x) u(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty).$$

Dabei seien die Abbildungen $u(\cdot,t), \Delta u(\cdot,t), \frac{\partial}{\partial t} u(\cdot,t) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ für alle $t \in (0,\infty)$. Außerdem existiere für alle $t_0 \in (0,\infty)$ eine Umgebung U und eine integrierbare Funktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} |u(x,t)|^2 \right| \le g(x) \quad \text{für alle } t \in U,\ x \in \mathbb{R}^n.$$

Zeigen Sie, dass dann gilt

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^n} |u(x,t)|^2\, dx = 0 \quad \text{für alle } t > 0.$$

Organisatorisches

Übungsblätter

- Das neue Übungsblatt gibt es auf der Homepage http://www.math.kit.edu/iana2/edu/rewp2019s/
- Keine Abgabe, keine Korrektur.

Bei Fragen

- Sprechstunde: Dienstag 15:30-16:30 oder nach Vereinbarung, Zimmer 3.038 Kollegiengebäude Mathematik (20.30).
- E-Mail: d.maier@kit.edu