Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
Daniela Maier, M.Sc.

SS 2019
2.5.2019

Rand- und Eigenwertprobleme

2. Übungsblatt

Aufgabe 4
Sei $f \in C([0,1],\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass das Randwertproblem

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), \quad \text{in} \quad (0,1), \\ \quad u(0) = 0, \\ \quad u(1) = 0, \end{cases}$$

eine eindeutige Lösung besitzt, die geschrieben werden kann als $u(x) = \int_0^1 G(x,t)f(t)dt$ mit einer geeigneten Funktion G. Zeigen Sie außerdem die Abschätzungen

$$\|u\|_\infty \leq \frac{1}{8}\|f\|_\infty, \quad \|u'\|_\infty \leq \frac{1}{2}\|f\|_\infty.$$

Aufgabe 5
Zeigen Sie, dass der Operator

$$L = (x^2-1)\frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2xy\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + (y^2-1)\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

elliptisch, aber nicht gleichmäßig elliptisch in $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2<1\}$ ist.

Aufgabe 6

(a) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, offen und nicht leer. Zeigen Sie, dass

$$L_p(\Omega) \supsetneq L_q(\Omega) \quad \text{für alle } p,q \in [1,\infty] \text{ mit } p<q.$$

(b) Zeigen Sie, dass

$$L_p(\mathbb{R}^n) \not\subset L_q(\mathbb{R}^n) \quad \text{für alle } p,q \in [1,\infty] \text{ mit } p \neq q.$$