Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
Daniela Maier, M.Sc.

SS 2019
9.5.2019

Rand- und Eigenwertprobleme

3. Übungsblatt

Aufgabe 7
Sei $\emptyset \neq K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $U \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $K \subset U$. Konstruieren Sie eine Funktion $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit

- $0 \leq g \leq 1$ in $\mathbb{R}^n$,
- $g \equiv 1$ in K,
- $g \equiv 0$ in $\mathbb{R}^n \setminus U$

wie folgt: Für $\delta > 0$ sei

$$K_\delta := \{x \in U \colon \operatorname{dist}(x, K) \leq \delta\}.$$

Definieren Sie $g := (\chi_{K_\delta})_\alpha$ mit geeigneten Werten von $\delta, \alpha > 0$ und zeigen Sie die geforderten Eigenschaften. Dabei bezeichne χ_A die charakteristische Funktion einer Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ und f_α die Glättung der Funktion f.

Aufgabe 8
Bestimmen Sie die schwache Ableitung erster Ordnung der Betragsfunktion

$$u \colon (-1, 1) \to \mathbb{R}, \quad u(x) = |x|.$$

Zeigen Sie dann, dass die schwache Ableitung zweiter Ordnung nicht existiert.

Aufgabe 9

(a) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $x_0 \in \Omega$ und $u : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $u \in C^1(\Omega \backslash \{x_0\}) \cap L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Weiter gelte für die klassischen partiellen Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, $i = 1, ..., n$, sowie

$$\varepsilon^{n-1} \sup_{x \in \partial B_\varepsilon(x_0)} |u(x)| \to 0, \quad (\varepsilon \to 0).$$

Zeigen Sie, dass u einmal schwach differenzierbar ist.

(b) Sei $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + y^2} < \frac{1}{4}\}$. Untersuchen Sie die Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$u(x, y) = \log\left(\left|\log(\sqrt{x^2 + y^2})\right|\right),$$

auf schwache Differenzierbarkeit erster Ordnung.