Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
Daniela Maier, M.Sc.

SS 2019
16.5.2019

Rand- und Eigenwertprobleme

4. Übungsblatt

Aufgabe 10

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $0 \in \Omega$. Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$, $p \in [1, \infty]$ ist die Funktion $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|^\alpha$, ein Element von $W^{1,p}(\Omega)$?

Aufgabe 11

(a) Seien $u, v \in C_c^\infty((0,1))$. Zeigen Sie für alle $x, y \in (0,1)$ die Abschätzungen

$$|u(x) - u(y)| \leq \sqrt{|x-y|}\|u'\|_{L^2(0,1)},$$
$$|u(x) - v(x)| \leq \min\left\{\sqrt{x}, \sqrt{1-x}\right\} \|u' - v'\|_{L^2(0,1)}.$$

(b) Beweisen Sie mit Hilfe von (a) und der Dichtheit von $C_c^\infty((0,1))$ in $W_0^{1,2}(0,1)$ die Inklusion

$$W_0^{1,2}(0,1) \subset C([0,1]).$$

Bemerkung: Das heißt, dass in jeder Äquivalenzklasse $u \in W_0^{1,2}(0,1)$ ein stetiger Repräsentant $v \in C([0,1])$ existiert.

(c) Zeigen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass

$$C([0,1]) \not\subset W^{1,2}(0,1).$$

(d) Zeigen Sie außerdem durch ein Gegenbeispiel, dass

$$W^{1,2}(\Omega) \not\subset C(\overline{\Omega})$$

für $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen. *Hinweis:* Betrachten Sie die Funktion aus Aufgabe 9.

Aufgabe 12

Es seien $I = (-1, 1)$ sowie $u\colon I \to \mathbb{R}$, $u(x) = 1 - |x|$. Zeigen Sie:

(a) $u \in W^{1,\infty}(I)$.

(b) $u \in W_0^{1,p}(I)$ für alle $p \in [1, \infty)$, aber $u \notin W_0^{1,\infty}(I)$.

(c) u ist keine schwache Lösung des Randwertproblems

$$u'' = 0 \quad \text{in } I, \quad u(-1) = u(1) = 0,$$

obwohl u in $W_0^{1,2}(I)$ liegt, stetig ist und die Randbedingungen erfüllt.