Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
Daniela Maier, M.Sc.

SS 2019
23.5.2019

Rand- und Eigenwertprobleme

5. Übungsblatt

Aufgabe 13
Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt sowie $u, v \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Zeigen Sie für $i = 1, \ldots, n$:

(a) Die Regel der partiellen Integration:

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v \, dx = - \int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx.$$

(b) Die Produktregel für schwache Ableitungen:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(uv) = \frac{\partial u}{\partial x_i} v + u \frac{\partial v}{\partial x_i}.$$

Aufgabe 14
Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $c \in L^\infty(\Omega)$, $c \geq 0$, $f \in L^2(\Omega)$.

(a) Zeigen Sie, dass die Norm $|||u||| := (\int_\Omega |\nabla u|^2 + c(x) u^2 \, dx)^{\frac{1}{2}}$ äquivalent zur üblichen $W_0^{1,2}(\Omega)$-Norm ist.

(b) Zeigen Sie, dass das Randwertproblem

$$-\Delta u + c(x) u = f \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega,$$

eine eindeutige schwache Lösung in $W_0^{1,2}(\Omega)$ besitzt.

Aufgabe 15
Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $L = -\sum_{i,j=1}^{n} \partial_i(a_{ij}(x)\partial_j) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\partial_i + c(x)$ ein gleichmäßig elliptischer linearer Differentialoperator mit Koeffizienten $a_{ij}, c \in L^\infty(\Omega)$ und $b_i \in C^1(\overline{\Omega})$ $(i, j = 1, \dots, n)$ und

$$2c(x) - \sum_{i=1}^{n} \partial_i b_i(x) \geq 0 \quad \text{für fast alle } x \in \Omega.$$

Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Lax-Milgram, dass das Randwertproblem

$$\begin{cases} Lu = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases}$$

für jedes $f \in L^2(\Omega)$ eine eindeutige schwache Lösung $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ besitzt.

Aufgabe 16
Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet und $f \in L^2(\Omega)$.

(a) Zeigen Sie, dass das Neumann-Randwertproblem

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{in } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases}$$

genau eine schwache Lösung $u \in W^{1,2}(\Omega)$ hat.

(b) Sei zusätzlich $L = -\sum_{i,j=1}^{n} \partial_i(a_{ij}(x)\partial_j) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\partial_i + c(x)$ ein gleichmäßig elliptischer linearer Differentialoperator mit Koeffizienten $a_{ij}, b_i, c \in L^\infty(\Omega)$ $(i, j = 1, \dots, n)$.
Zeigen Sie: Es existiert ein $\mu_0 \geq 0$ so, dass für alle $\mu \geq \mu_0$ genau eine schwache Lösung $u \in W^{1,2}(\Omega)$ des Problems

$$\begin{cases} Lu + \mu u = f & \text{in } \Omega, \\ \nu^T A(x) \nabla u(x) = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases}$$

existiert.