Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
Daniela Maier, M.Sc.

SS 2019
30.5.2019

Rand- und Eigenwertprobleme

6. Übungsblatt

Aufgabe 17
Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, $f \in L^2(\Omega)$ sowie $F\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ mit $F_i \in L^2(\Omega)$ $(i = 1, \dots, n)$.

(a) Zeigen Sie, dass das Randwertproblem

$$\begin{cases} -\Delta u = \operatorname{div} F & \text{in } \Omega, \\ \quad u = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases}$$

genau eine schwache Lösung $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ hat. Leiten Sie dazu zunächst eine geeignete schwache Formulierung des Problems her.

(b) Sei zusätzlich $L = -\sum_{i,j=1}^{n} \partial_i(a_{ij}(x)\partial_j) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\partial_i + c(x)$ ein gleichmäßig elliptischer linearer Differentialoperator mit Koeffizienten $a_{ij}, b_i, c \in L^\infty(\Omega)$ $(i, j = 1, \dots, n)$. Zeigen Sie: Es existiert ein $\mu_0 \geq 0$ so, dass

$$\begin{cases} Lu + \mu u = f + \operatorname{div} F & \text{in } \Omega, \\ \qquad u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

für alle $\mu \geq \mu_0$ eine eindeutige schwache Lösung $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ besitzt.

Aufgabe 18
Es seien $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum sowie $S, T\colon H \to H$ lineare Operatoren. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Ist T kompakt, so ist T beschränkt.

(b) Ist S beschränkt und T kompakt, so sind $S \circ T$ und $T \circ S$ kompakt.

(c) Ist T kompakt, so ist auch T^2 kompakt.

(d) Ist T^2 kompakt, so ist auch T kompakt.

(e) Gilt $\dim(\operatorname{Bild}(T)) < \infty$ und ist T beschränkt, so ist T kompakt.

(f) Gilt $\dim(\operatorname{Bild}(T)) < \infty$, so ist T kompakt.

— bitte wenden —

Aufgabe 19
Es seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und $k \in C(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega})$. Zeigen Sie, dass der Operator

$$K\colon (C(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_\infty) \to (C(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_\infty), \quad u \mapsto (Ku)(x) := \int_\Omega k(x,y)u(y)\,dy$$

kompakt ist.

Hinweis: Satz von Arzelà-Ascoli:
Seien $D \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $f_j\colon D \to \mathbb{R}$ stetig mit:

(a) $\forall x \in D\ \exists M = M(x) > 0 : |f_j(x)| \leq M\ \forall j \in \mathbb{N}$.

(b) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : x, y \in D, |x - y| < \delta \Rightarrow |f_j(x) - f_j(y)| < \varepsilon\ \forall j \in \mathbb{N}$.

Dann hat die Funktionenfolge $(f_j) \subset C(D)$ eine gleichmäßig konvergente Teilfolge.