Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
Daniela Maier, M.Sc.

SS 2019
6.6.2019

Rand- und Eigenwertprobleme

7. Übungsblatt

Aufgabe 20 Sei H ein Hilbertraum und $A : H \to H$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie:

(a) Sind A und B in $\mathcal{L}(H)$, so ist $(AB)^* = B^*A^*$.

(b) Der Operator $A \in \mathcal{L}(H)$ ist genau dann invertierbar, wenn A^* invertierbar ist und es gilt $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

Ziel des restlichen Übungsblattes ist es unter anderem, die Bedingung $b_i \in C^1(\overline{\Omega})$ in der Definition des formal adjungierten Operators L^* (Definition 28) zu vermeiden. Dafür muss man die bisherige Theorie verallgemeinern auf Operatoren der Form

$$Lu = \sum_{i=1}^{n} \left(-\partial_i \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)\partial_j u + \boldsymbol{d_i(x)} u \Big) + b_i(x)\partial_i u \right) + c(x)u$$

mit $a_{ij}, b_i, d_i, c \in L^\infty(\Omega)$ und $a_{ij} = a_{ji}$ für $i, j = 1, \ldots, n$. Im Folgenden sei Ω ein beschränktes Lipschitzgebiet und es gebe $\lambda > 0$ mit $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2$ $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$, $\forall x \in \Omega$.

Aufgabe 21 Sei $f \in L^2(\Omega)$.

(a) Leiten Sie eine geeignete schwache Formulierung her für die Probleme:

$$(D)_\mu \begin{cases} Lu + \mu u &= f \text{ in } \Omega, \\ u &= 0 \text{ auf } \partial\Omega. \end{cases} \qquad (N)_\mu \begin{cases} Lu + \mu u &= f \text{ in } \Omega, \\ \nu(x)^T A(x)\nabla u + d(x)\cdot\nu(x)u &= 0 \text{ auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

(b) Definieren Sie eine geeignete Bilinearform $B_\mu : W^{1,2}(\Omega) \times W^{1,2}(\Omega)$ mit der Eigenschaft:

(i) $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ löst $B_\mu[u, \phi] = \int_\Omega f\phi\, dx$ $\forall \phi \in W_0^{1,2}(\Omega) \Leftrightarrow u$ ist schwache Lösung von $(D)_\mu$.

(ii) $u \in W^{1,2}(\Omega)$ löst $B_\mu[u, \phi] = \int_\Omega f\phi\, dx$ $\forall \phi \in W^{1,2}(\Omega) \Leftrightarrow u$ ist schwache Lösung von $(N)_\mu$.

(c) Zeigen Sie: es existiert ein $\mu_0 \geq 0$ so, dass für $\mu \geq \mu_0$ gilt: (D)$_\mu$ bzw. (N)$_\mu$ hat genau eine schwache Lösung $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ bzw. $u \in W^{1,2}(\Omega)$.

Aufgabe 22 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet und

$$L^*u = \sum_{i=1}^n \left(-\partial_i \Big(\sum_{j=1}^n a_{ij}(x)\partial_j u + b_i(x)u \Big) + \boldsymbol{d_i(x)}\partial_i u \right) + c(x)u$$

der formal zu L adjungierte Operator.

(a) Zeigen Sie für $u, \phi \in W^{1,2}(\Omega)$: $B[u, \phi] = B^*[\phi, u]$.

(b) Zeigen Sie: sind $a_{ij}, b_i, d_i \in C^1(\overline{\Omega})$ und $u, \phi \in C^2(\overline{\Omega})$ so gilt

$$\int_\Omega \phi Lu \, dx + \oint_{\partial\Omega} \phi R_L u \, d\sigma = \int_\Omega u L^*\phi \, dx + \oint_{\partial\Omega} u R_{L^*}\phi \, d\sigma,$$

wobei

$$\begin{aligned} (R_L u)(x) &:= \nu(x)^T A(x) \nabla u(x) + d(x) \cdot \nu(x) u(x) \\ (R_{L^*} u)(x) &:= \nu(x)^T A(x) \nabla u(x) + b(x) \cdot \nu(x) u(x). \end{aligned}$$

(c) Zeigen Sie die Fredholm-Alternative für Neumann-Randwertprobleme: Entweder

(I) Das RWP

$$\begin{cases} Lu &= f \text{ in } \Omega, \\ R_L u &= 0 \text{ auf } \partial\Omega, \end{cases}$$

hat für jedes $f \in L^2(\Omega)$ eine eindeutige Lösung $u \in W^{1,2}(\Omega)$.

oder

(II) Es gibt eine nichttriviale Lösung $u \in W^{1,2}(\Omega)$ von

$$\begin{cases} Lu &= 0 \text{ in } \Omega, \\ R_L u &= 0 \text{ auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Im Fall (II) gilt zusätzlich: Das inhomogene RWP ist lösbar genau dann, wenn $\langle f, v \rangle_{L^2} = 0$ für jede Lösung $v \in W^{1,2}(\Omega)$ des adjungierten RWPs

$$\begin{cases} L^* v &= 0 \text{ in } \Omega, \\ R_{L^*} v &= 0 \text{ auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Bemerkung: Die Fredholm-Alternative für Dirichlet-Randwertprobleme gilt in ähnlicher Form.