Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
Daniela Maier, M.Sc.

SS 2019
13.6.2019

Rand- und Eigenwertprobleme

8. Übungsblatt

Aufgabe 23

Es sei Ω ein beschränktes Lipschitz-Gebiet. Betrachten Sie für $f \in L^2(\Omega)$ das Neumann-Randwertproblem

$$(1) \qquad \begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass (1) genau dann eine schwache Lösung besitzt, wenn $\int_\Omega f(x)\,dx = 0$ gilt.
Hinweis: Finden Sie wie im Fall des Dirichlet-Randwertproblems einen kompakten Operator $K\colon L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ so, dass (1) äquivalent zum Problem $(\mathrm{Id} - K)u = Kf$ ist. Sie können dabei ohne Beweis verwenden, dass die Einbettung $W^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ kompakt ist.

Aufgabe 24 (Vergleichsprinzip)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet und $\tilde{L} = -\sum\limits_{i,j=1}^{n} \partial_i \left(a_{ij}(x)\partial_j\right) + c(x)$ ein gleichmäßig elliptischer Differentialoperator mit $a_{ij}, c \in L^\infty(\Omega)$ $(i,j = 1,\dots,n)$ und $c \geq 0$. Für $f \in L^2(\Omega)$ seien $u, v \in W^{1,2}(\Omega)$ schwache Lösungen von

$$\tilde{L}u \leq f \text{ in } \Omega \text{ bzw.}$$
$$\tilde{L}v \geq f \text{ in } \Omega$$

mit $u \leq v$ auf $\partial\Omega$ im Sinne der Spur. Zeigen Sie, dass $u \leq v$ f.ü. in Ω.

Aufgabe 25 (A-priori Schranken)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet und $\tilde{L}$ wie in Aufgabe 24 mit Elliptizitätskonstante $\lambda > 0$. Für $f \in L^\infty(\Omega)$ sei ferner $u \in W^{1,2}(\Omega)$ eine schwache Lösung von

$$\tilde{L}u = f \text{ in } \Omega.$$

Zeigen Sie: Es existiert eine Konstante $C > 0$ so, dass

$$\sup_{\overline{\Omega}} u \leq \sup_{\partial\Omega} |u| + \frac{C}{\lambda}\|f\|_\infty.$$

Liegt Ω zwischen zwei parallelen Hyperebenen $\{x_1 = a\}$, $\{x_1 = b\}$ mit $a < b$, so lässt sich $C = e^{b-a}$ wählen.
Hinweis: Nutzen Sie das Vergleichsprinzip aus Aufgabe 24 mit

$$v = \sup_{\partial\Omega} |u| + \left(e^{b-a} - e^{x_1 - a}\right) \frac{1}{\lambda}\|f\|_\infty.$$