Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
Daniela Maier, M.Sc.

SS 2019
21.6.2019

Rand- und Eigenwertprobleme

9. Übungsblatt

Aufgabe 26
Es sei $\Omega = (0,1) \times (0,1) \subset \mathbb{R}^2$ und $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

- Die Funktion u erfülle
$$\begin{cases} -\Delta u(x) + c(x)u(x) \geq 0 & \text{in } \Omega, \\ u(x) \geq 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$
Geben Sie ein Beispiel für u und c an, so dass $\min\limits_{\overline{\Omega}} u < 0$ ist.

- Sei $d > 0$. Die Funktion u erfülle
$$\begin{cases} -d\Delta u(x) + u(x) \geq 0 & \text{in } \Omega, \\ u(x) \geq 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$
Geben Sie ein Beispiel für u an, so dass $\inf_\Omega u < \inf_{\partial\Omega} u$.

Aufgabe 27
Es sei $u \in W_0^{1,2}(0,1)$ eine schwache Lösung von
$$-u'' + b(x)u' + c(x)u = f(x) \quad \text{in } (0,1), \quad u(0) = u(1) = 0,$$
wobei $b, c \in L^\infty(0,1)$ und $f \in L^2(0,1)$. Zeigen Sie, dass $u \in W^{2,2}(0,1)$ gilt und dass u die Gleichung $-u''(x) + b(x)u'(x) + c(x)u(x) = f(x)$ punktweise fast überall in $(0,1)$ erfüllt.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst: Existiert ein $C > 0$ mit
$$\left| \int_0^1 u'\varphi' \, dx \right| \leq C\|\varphi\|_2 \quad \text{für alle } \varphi \in W_0^{1,2}(0,1),$$
so gilt $u \in W^{2,2}(0,1)$.

Aufgabe 28
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet und $c \in L^\infty(\Omega)$.

(a) Zeigen Sie: Falls eine Funktion $h \in C^2(\overline{\Omega})$ mit $(-\Delta + c(x))h > 0$ in Ω und $h > 0$ auf $\overline{\Omega}$ existiert, so gilt:

(1) $\quad \left[u \in W^{1,2}(\Omega),\ (-\Delta + c(x))u \geq 0 \text{ in } \Omega,\ u \geq 0 \text{ auf } \partial\Omega\right] \Longrightarrow u \geq 0 \text{ in } \Omega.$

Zeigen Sie dazu zunächst, dass $\frac{u}{h} \in W^{1,2}(\Omega)$ die Differentialungleichung

$$-\Delta \frac{u}{h} + \left(\frac{-\Delta h}{h} + c(x) \right) \frac{u}{h} - 2 \frac{\nabla h}{h} \cdot \nabla \left(\frac{u}{h} \right) \geq 0 \text{ in } \Omega$$

im schwachen Sinn löst.

(b) Es sei $\Omega \subset \{x \in \mathbb{R}^n \colon 0 < x_1 < d\}$. Zeigen Sie mit Hilfe von (a), dass die Aussage (1) gilt, falls $\|c\|_\infty$ fest und d genügend klein ist.
Hinweis: Verwenden Sie den Ansatz $h(x) = h(x_1)$.