

Rand- und Eigenwertprobleme

12. Übungsblatt

Aufgabe 35

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Lipschitzgebiet und λ_1 der erste Dirichlet-Eigenwert von $-\Delta$ auf Ω . In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass λ_1 ein einfacher Eigenwert ist (d.h. der zugehörige Eigenraum hat Dimension 1) und dass die zugehörige Eigenfunktion keine Nullstelle in Ω besitzt. Im Folgenden sei

$$R(u) = \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx}{\int_{\Omega} u^2 dx}, \quad u \in W_0^{1,2}(\Omega) \setminus \{0\}$$

der Rayleighquotient von u .

(a) Sei $\tilde{u} \in W_0^{1,2}(\Omega)$ Zeigen Sie:

$$\tilde{u} \text{ ist Eigenfunktion von } -\Delta \text{ zum Eigenwert } \lambda_1 \Leftrightarrow R(\tilde{u}) = \lambda_1$$

Hinweis zu \Leftarrow : Die Funktion $\mathbb{R} \ni t \mapsto R(\tilde{u} + t\phi)$ besitzt für jedes $\phi \in W_0^{1,2}(\Omega)$ ein lokales Minimum bei $t = 0$. Folglich gilt $\frac{d}{dt}R(\tilde{u} + t\phi)|_{t=0} = 0$.

(b) Beweisen Sie: Ist \tilde{u} eine Eigenfunktion von $-\Delta$ zum Eigenwert λ_1 , so gilt dies auch für $|\tilde{u}|$. Zeigen Sie, dass $|\tilde{u}|$ (und somit auch \tilde{u}) in Ω keine Nullstelle besitzt.

Hinweis: Sie können verwenden, dass jede Dirichlet-Eigenfunktion von $-\Delta$ auf Ω in $C^1(\Omega)$ liegt.

(c) Zeigen Sie, dass keine zwei linear unabhängige Eigenfunktionen von $-\Delta$ zum Eigenwert λ_1 existieren.

Aufgabe 36

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte offene Menge und $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ die Dirichlet-Eigenwerte von $-\Delta$ auf Ω mit einer zugehörigen L^2 -ONB $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}$ aus Eigenfunktionen. Ferner sei $u \in W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$.

(a) Zeigen Sie die Existenz von Koeffizienten $\alpha_i \in \mathbb{R}$ mit

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \varphi_i, \quad -\Delta u = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \alpha_i \varphi_i.$$

(b) Seien $\mu \in \mathbb{R}$ und $\delta \geq 0$ gegeben durch

$$\delta = \frac{\|\Delta u + \mu u\|_2}{\|u\|_2}, \quad (u \neq 0).$$

Zeigen Sie, dass das Intervall $[\mu - \delta, \mu + \delta]$ mindestens einen Eigenwert λ_i enthält.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst $\|\Delta u + \mu u\|_2^2 \geq \min_{i \in \mathbb{N}} |\lambda_i - \mu|^2 \|u\|_2^2$.