Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
Dipl.-Math. Carlos Hauser

SS 2015
16.6.2015

Rand- und Eigenwertprobleme

10. Übungsblatt

Aufgabe 27
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet und $c \in L^\infty(\Omega)$.

(a) Zeigen Sie: Falls eine Funktion $h \in C^2(\overline{\Omega})$ mit $(-\Delta + c(x))h > 0$ in Ω und $h > 0$ auf $\overline{\Omega}$ existiert, so gilt:

$$(1) \qquad \left[u \in W^{1,2}(\Omega),\ (-\Delta + c(x))u \geq 0 \text{ in } \Omega,\ u \geq 0 \text{ auf } \partial\Omega\right] \Longrightarrow u \geq 0 \text{ in } \Omega.$$

Zeigen Sie dazu zunächst, dass $\frac{u}{h} \in W^{1,2}(\Omega)$ die Differentialungleichung

$$-\Delta \frac{u}{h} + \left(\frac{-\Delta h}{h} + c(x)\right)\frac{u}{h} - 2\frac{\nabla h}{h} \cdot \nabla\left(\frac{u}{h}\right) \geq 0 \text{ in } \Omega$$

im schwachen Sinn löst.

(b) Es sei $\Omega \subset \{x \in \mathbb{R}^n : 0 < x_1 < d\}$. Zeigen Sie mit Hilfe von (a), dass die Aussage (1) gilt, falls $\|c\|_\infty$ fest und d genügend klein ist.
Hinweis: Verwenden Sie den Ansatz $h(x) = h(x_1)$.

Aufgabe 28
Seien $n \geq 3$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, $f \in L^{\frac{2n}{n+2}}(\Omega)$.

(a) Zeigen Sie, dass das Randwertproblem

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

genau eine schwache Lösung $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ hat. Warum ist dies eine Erweiterung der Aussage von Aufgabe 15(a)?
Hinweis: $\frac{2n}{n+2}$ ist der zu $\frac{2n}{n-2}$ duale Hölder-Exponent, d.h. $\frac{2n}{n+2} = \left(\frac{2n}{n-2}\right)'$.

(b) Formulieren Sie für eine möglichst allgemeine rechte Seite g und einen möglichst allgemeinen Operator L (unter Zuhilfenahme von Aufgabenteil (a), Aufgabe 15(b), 19(a)) Lösbarkeitssätze für das Problem

$$\begin{cases} Lu + \mu u = g & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Aufgabe 29
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Beweisen Sie: Es gibt keinen stetigen Spuroperator $T\colon L^2(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ mit $Tu = u|_{\partial\Omega}$ für $u \in C(\overline{\Omega})$.

Hinweis: Betrachten Sie beispielsweise die Funktion $u \equiv 1$. Finden Sie $u_k \in C(\overline{\Omega})$ mit $u_k \to u$ in $L^2(\Omega)$ und $\big\| u_k|_{\partial\Omega} - u|_{\partial\Omega} \big\|_{L^2(\partial\Omega)} \not\to 0$.

Bemerkung: Bei der Konstruktion des Spuroperators wurde die Aussage $W^{1,2}(\Omega) = \overline{C^1(\overline{\Omega})}^{\|\cdot\|_{1,2}}$ benutzt. Obwohl $L^2(\Omega) = \overline{C(\overline{\Omega})}^{\|\cdot\|_2}$ gilt, ist es nicht möglich einen stetigen Spuroperator $T\colon L^2(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ mit $Tu = u|_{\partial\Omega}$ für $u \in C(\overline{\Omega})$ zu konstruieren.