Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
Dipl.-Math. Carlos Hauser

SS 2015
23.6.2015

Rand- und Eigenwertprobleme

11. Übungsblatt

Aufgabe 30 (Fortsetzung A27)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet und $c \in L^\infty(\Omega)$. Ferner existiere eine Funktion $h \in C^2(\overline{\Omega})$ mit $(-\Delta + c(x))h > 0$ in Ω und $h > 0$ auf $\overline{\Omega}$. Zeigen Sie:

(a) $B[\varphi, \varphi] \geq 0$ für alle $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$, wobei B die zum Operator $-\Delta + c(x)$ gehörende Bilinearform bezeichnet.
Hinweis: Zeigen Sie $B[h, \frac{\varphi^2}{h}] = B[\varphi, \varphi] - \int_\Omega |\frac{\varphi}{h}\nabla h - \nabla\varphi|^2 \, dx$.

(b) Für alle $\varepsilon > 0$ und alle $f \in L^2(\Omega)$ hat das Problem

$$\begin{cases} -(1+\varepsilon)\Delta u + c(x)u = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

genau eine Lösung $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

Aufgabe 31 (Hardy-Ungleichung)
Seien $n \geq 3$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Für alle $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ gilt dann

$$\left(\frac{n-2}{2}\right)^2 \int_\Omega \frac{u^2}{|x|^2} \, dx \leq \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx.$$

Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(a) Zeigen Sie zunächst für $u \in C_c^\infty(\Omega)$ und ein C^1-Vektorfeld $F\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ die Abschätzung

$$\int_\Omega -(\operatorname{div} F + |F|^2)u^2 \, dx \leq \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx.$$

Hinweis: Starten Sie mit $\int_\Omega \operatorname{div}(Fu^2) \, dx$.

(b) Wählen Sie nun $F(x) := \frac{tx}{|x|^2+\varepsilon}$ für $\varepsilon > 0$, $t < 0$ und betrachten $\varepsilon \to 0$.

Aufgabe 32
Seien $n \geq 3$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Zeigen Sie: Für alle $-\left(\frac{n-2}{2}\right)^2 < \mu < \infty$ und alle $f \in L^2(\Omega)$ hat das Problem

$$\begin{cases} -\Delta u + \dfrac{\mu}{|x|^2}u = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

genau eine Lösung $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$.
Hinweis: Hardy-Ungleichung.