Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
Dipl.-Math. Carlos Hauser

SS 2015
30.6.2015

Rand- und Eigenwertprobleme

12. Übungsblatt

Aufgabe 33
Bestimmen Sie alle Eigenwerte $\lambda \in \mathbb{R}$ und alle Eigenvektoren des Randwertproblems

$$\begin{cases} -(x^2u'(x))' = \lambda u(x), \quad x \in (1,e), \\ \qquad u(1) = u(e) = 0. \end{cases}$$

Hinweis: Verwenden Sie die Substitution $x = e^t$ und betrachten Sie die Differentialgleichung, die $\tilde{u}(t) := u(e^t)$ löst.

Aufgabe 34
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, das strikt sternförmig bezüglich $0 \in \Omega$ ist, sowie $0 < p < 1$. Zeigen Sie: Es existiert höchstens eine schwache Lösung $u \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ von

$$\begin{cases} -\Delta u = u^p & \text{in } \Omega, \\ \quad u > 0 & \text{in } \Omega, \\ \quad u = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Gehen Sie dazu wie folgt vor:

1.) Seien $u, v \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ zwei Lösungen des gegebenen Randwertproblems. Betrachten Sie für ein $\beta > 0$ und $t > 1$ die Funktionen

$$u_t(x) := t^\beta u\left(\frac{x}{t}\right), \quad x \in t\Omega = \{tx \colon x \in \Omega\}.$$

Wählen Sie $\beta > 0$ so, dass $-\Delta u_t = u_t^p$ in Ω.

2.) Sei $\tau := \inf\{t > 1 \colon u_t \geq v \text{ in } \Omega\} \in [1, \infty)$. Zeigen Sie, dass τ wohldefiniert ist und $\tau = 1$ gilt. *Hinweis:* Widerspruchsbeweis mit Maximumprinzip.

Aufgabe 35
Zeigen Sie für $0 < p < 1$ die Existenz einer Lösung $u \in C^2([-1,1])$ von

$$\begin{cases} \quad -u'' = u^p & \text{in } [-1,1], \\ \quad\; u > 0 & \text{in } (-1,1), \\ u(-1) = u(1) = 0. \end{cases}$$

— bitte wenden —

Hinweis: Betrachten Sie für $\alpha > 0$ die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\begin{cases} -v'' = v^p, \\ v(0) = \alpha, \\ v'(0) = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass ein $R > 0$ existiert mit $v > 0$ auf $[0, R)$ und $v(R) = 0$. Skalieren Sie v geeignet durch $v_t(x) := t^\beta v\left(\frac{x}{t}\right)$ wie in Aufgabe 34.