Karlsruher Institut für Technologie (KIT) SS 2015
Institut für Analysis 7.7.2015
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
Dipl.-Math. Carlos Hauser

Rand- und Eigenwertprobleme

13. Übungsblatt

Aufgabe 36
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet und λ_1 der erste Dirichlet-Eigenwert von $-\Delta$ mit zugehöriger Eigenfunktion $\varphi_1 \in W_0^{1,2}(\Omega)$. In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass λ_1 ein einfacher Eigenwert ist, d.h. der zugehörige Eigenraum hat Dimension 1 und dass die einzige Eigenfunktion keine Nullstellen in Ω besitzt. Sie dürfen hierbei ohne Beweis verwenden, dass für jede Eigenfunktion $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ von $-\Delta$ auf Ω gilt: $v \in C^1(\Omega)$.
Im Folgenden sei

$$R(u) = \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 dx}{\int_\Omega u^2 dx}, \quad u \in W_0^{1,2}(\Omega) \setminus \{0\}$$

der Rayleighquotient von u.

(a) Sei $\tilde{u} \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Zeigen Sie:

$$\tilde{u} \text{ ist Eigenfunktion von } -\Delta \text{ zum Eigenwert } \lambda_1 \Leftrightarrow R(\tilde{u}) = \lambda_1.$$

Hinweis zu $\Leftarrow$*:* Die Funktion $\mathbb{R} \ni t \mapsto R(\tilde{u} + t\varphi)$ besitzt für jedes $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$ ein lokales Minimum bei $t = 0$ und folglich gilt $\frac{d}{dt} R(\tilde{u} + t\varphi)\big|_{t=0} = 0$.

(b) Beweisen Sie: Ist $\tilde{u}$ eine Eigenfunktion von $-\Delta$ zum Eigenwert λ_1, so gilt dies auch für $|\tilde{u}|$. Wenden Sie das starke Maximumprinzip auf $|\tilde{u}|$ an um zu zeigen, dass $|\tilde{u}|$ (und damit auch $\tilde{u}$) in Ω keine Nullstellen besitzt.

(c) Zeigen Sie, dass keine zwei linear unabhängigen Eigenfunktionen von $-\Delta$ zum Eigenwert λ_1 existieren.

Aufgabe 37
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte offene Menge und $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ die Dirichlet-Eigenwerte von $-\Delta$ auf Ω mit einer zugehörigen L^2-ONB $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}$ aus Eigenfunktionen. Ferner sei $u \in W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$.

(a) Zeigen Sie die Existenz von Koeffizienten $\alpha_i \in \mathbb{R}$ mit

$$u = \sum_{i=1}^\infty \alpha_i \varphi_i, \quad -\Delta u = \sum_{i=1}^\infty \lambda_i \alpha_i \varphi_i.$$

(b) Seien $\mu \in \mathbb{R}$ und $\delta \geq 0$ gegeben durch

$$\delta = \frac{\|\Delta u + \mu u\|_2}{\|u\|_2}, \quad (u \neq 0).$$

Zeigen Sie, dass das Intervall $[\mu - \delta, \mu + \delta]$ mindestens einen Eigenwert λ_i enthält.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst $\|\Delta u + \mu u\|_2^2 \geq \min_{i \in \mathbb{N}} |\lambda_i - \mu|^2 \|u\|_2^2$.

Aufgabe 38

Sei $B_1(0) \subset \mathbb{R}^3$ die Einheitskugel. Bestimmen Sie alle diejenigen Eigenfunktionen φ von $-\Delta$ mit Neumannschen Randbedingungen, die nur von $r = |x|$ abhängen. Zeigen Sie, dass die Eigenwerte im Intervall $[0, \infty)$ liegen und dass für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ genau ein Eigenwert im Intervall $[(n\pi)^2, (n\pi + \frac{\pi}{2})^2]$ liegt und sonst keine weiteren Eigenwerte existieren.
Hinweis: $\varphi(x) = u(|x|), u(r) = r^{-1} v(r)$. Sie können annehmen, dass $\varphi \in C^2(B_1(0))$ und $u \in C^2([0, 1])$ ist.