Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
Dipl.-Math. Carlos Hauser

SS 2015
21.4.2015

Rand- und Eigenwertprobleme

2. Übungsblatt

Aufgabe 4
Sei $\emptyset \neq K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $U \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $K \subset U$. Konstruieren Sie eine Funktion $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit

- $0 \leq g \leq 1$ in $\mathbb{R}^n$,
- $g \equiv 1$ in K,
- $g \equiv 0$ in $\mathbb{R}^n \setminus U$

wie folgt: Setzen Sie $\delta := \frac{1}{2}\operatorname{dist}(K, \mathbb{R}^n \setminus U) > 0$ und

$$K_\delta := \{x \in U\colon \operatorname{dist}(x, K) \leq \delta\}.$$

Definieren Sie $g := (\chi_{K_\delta})_\delta$ und zeigen die geforderten Eigenschaften. Dabei bezeichnet χ_A die charakteristische Funktion einer Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ und $f_\delta = f * \varrho_\delta$ die Faltung einer Funktion f mit dem Mollifier ϱ_δ.

Aufgabe 5

(a) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und offen. Zeigen Sie, dass

$$L_p(\Omega) \supsetneq L_q(\Omega) \quad \text{für alle } p, q \in [1, \infty] \text{ mit } p < q.$$

(b) Zeigen Sie, dass

$$L_p(\mathbb{R}^n) \not\subset L_q(\mathbb{R}^n) \quad \text{für alle } p, q \in [1, \infty] \text{ mit } p \neq q.$$

Aufgabe 6
Zeigen Sie, dass die Funktion $u\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $u(x) := |x|$, eine schwache Ableitung erster Ordnung besitzt und bestimmen Sie diese.