Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
Dipl.-Math. Carlos Hauser

SS 2015
28.4.2015

Rand- und Eigenwertprobleme

3. Übungsblatt

Aufgabe 7

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $0 \in \Omega$. Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$, $p \in [1, \infty]$ ist die Funktion $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$, $f(x) := |x|^\alpha$, ein Element von $W^{1,p}(\Omega)$?

Aufgabe 8

(a) Seien $u, v \in C_c^\infty((0,1))$. Zeigen Sie für alle $x, y \in (0,1)$ die Abschätzungen

$$|u(x) - u(y)| \le \sqrt{|x-y|}\|u'\|_{L^2(0,1)} \quad \text{und}$$
$$|u(x) - v(x)| \le \min\left\{\sqrt{x}, \sqrt{1-x}\right\} \|u' - v'\|_{L^2(0,1)}.$$

(b) Beweisen Sie mit Hilfe von (a) und der Dichtheit von $C_c^\infty((0,1))$ in $W_0^{1,2}(0,1)$ die Inklusion

$$W_0^{1,2}(0,1) \subset C([0,1]).$$

Bemerkung: Das heißt, dass in jeder Äquivalenzklasse $u \in W_0^{1,2}(0,1)$ ein stetiger Repräsentant $v \in C([0,1])$ existiert.

(c) Zeigen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass $C([0,1]) \not\subset W^{1,2}(0,1)$.

Aufgabe 9

(a) Für $0 < R < \frac{1}{3}$ sei $u\colon B_R(0) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$u(x,y) := \log\left|\log\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\right|.$$

Berechnen Sie die schwachen Ableitungen erster Ordnung und zeigen Sie $u \in W^{1,2}(B_R(0))$.

(b) Beweisen Sie damit: Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen, so gilt $W^{1,2}(\Omega) \not\subset C(\overline{\Omega})$.