Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
Dipl.-Math. Carlos Hauser

SS 2015
5.5.2015

Rand- und Eigenwertprobleme

4. Übungsblatt

Aufgabe 10
Zeigen Sie, dass die Funktion $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $u(x,y) := \operatorname{sign}(x) + \operatorname{sign}(y)$ keine schwachen Ableitungen erster Ordnung besitzt, aber die zweite schwache Ableitung $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ existiert.

Aufgabe 11
Es seien $I := (-1,1)$ sowie $u\colon I \to \mathbb{R}$, $u(x) := 1 - |x|$. Zeigen Sie:

(a) $u \in W^{1,\infty}(I)$.

(b) $u \in W_0^{1,p}(I)$ für alle $p \in [1,\infty)$, aber $u \notin W_0^{1,\infty}(I)$.

(c) u ist keine schwache Lösung des Randwertproblems

$$u'' = 0 \quad \text{in } I, \quad u(-1) = u(1) = 0,$$

obwohl u in $W_0^{1,2}(I)$ liegt, stetig ist und die Randbedingungen erfüllt.

Aufgabe 12
Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $c \in L^\infty(\Omega)$, $c \geq 0$, $f \in L^2(\Omega)$.

(a) Zeigen Sie, dass die Norm $|||u||| := \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 + c(x)u^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$ äquivalent zur üblichen $W_0^{1,2}(\Omega)$-Norm ist.

(b) Zeigen Sie, dass das Randwertproblem

$$-\Delta u + c(x)u = f \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega$$

eine eindeutige schwache Lösung in $W_0^{1,2}(\Omega)$ besitzt.