Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
Dipl.-Math. Carlos Hauser

SS 2015
12.5.2015

# Rand- und Eigenwertprobleme

## 5. Übungsblatt

**Aufgabe 13**
Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt sowie $u, v \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Zeigen Sie für $i = 1, \ldots, n$:

(a) Die Regel der partiellen Integration:

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v \, dx = -\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx.$$

(b) Die Produktregel für schwache Ableitungen: $uv \in W_0^{1,1}(\Omega)$ mit

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(uv) = \frac{\partial u}{\partial x_i} v + u \frac{\partial v}{\partial x_i}.$$

**Aufgabe 14**
Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $L = -\sum_{i,j=1}^n \partial_i(a_{ij}(x)\partial_j) + \sum_{i=1}^n b_i(x)\partial_i + c(x)$ ein gleichmäßig elliptischer linearer Differentialoperator mit Koeffizienten $a_{ij}, c \in L^\infty(\Omega)$ und $b_i \in C^1(\overline{\Omega})$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ und

$$2c(x) - \sum_{i=1}^n \partial_i b_i(x) \geq 0 \quad \text{für fast alle } x \in \Omega.$$

Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Lax-Milgram, dass das Randwertproblem

$$\begin{cases} Lu = f & \text{in } \Omega, \\ \quad u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

für jedes $f \in L^2(\Omega)$ eine eindeutige schwache Lösung $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ besitzt.

**Aufgabe 15**
Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, $f \in L^2(\Omega)$ sowie $F \colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ mit $F_i \in L^2(\Omega)$ $(i = 1, \ldots, n)$.

(a) Zeigen Sie, dass das Randwertproblem

$$\begin{cases} -\Delta u = \operatorname{div} F & \text{in } \Omega, \\ \quad u = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases}$$

genau eine schwache Lösung $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ hat. Leiten Sie dazu zunächst eine geeignete schwache Formulierung des Problems her.



— bitte wenden —

(b) Sei zusätzlich $L = -\sum_{i,j=1}^{n} \partial_i(a_{ij}(x)\partial_j) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\partial_i + c(x)$ ein gleichmäßig elliptischer linearer Differentialoperator mit Koeffizienten $a_{ij}, b_i, c \in L^\infty(\Omega)$ $(i, j = 1, \ldots, n)$. Zeigen Sie: Es existiert ein $\mu_0 \geq 0$ so, dass

$$\begin{cases} Lu + \mu u = f + \operatorname{div} F & \text{in } \Omega, \\ \qquad u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

für alle $\mu \geq \mu_0$ eine eindeutige schwache Lösung $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ besitzt.