

## Rand- und Eigenwertprobleme

### 6. Übungsblatt

#### Aufgabe 16

Seien  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Lipschitz-Gebiet und  $f \in L^2(\Omega)$ .

- (a) Zeigen Sie, dass das Neumann-Randwertproblem

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

genau eine schwache Lösung  $u \in W^{1,2}(\Omega)$  hat.

- (b) Sei zusätzlich  $L = -\sum_{i,j=1}^n \partial_i(a_{ij}(x)\partial_j) + \sum_{i=1}^n b_i(x)\partial_i + c(x)$  ein gleichmäßig elliptischer linearer Differentialoperator mit Koeffizienten  $a_{ij}, b_i, c \in L^\infty(\Omega)$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ). Zeigen Sie: Es existiert ein  $\mu_0 \geq 0$  so, dass für alle  $\mu \geq \mu_0$  genau eine schwache Lösung  $u \in W^{1,2}(\Omega)$  des Problems

$$\begin{cases} Lu + \mu u = f & \text{in } \Omega, \\ (\nabla u)^T A(x)\nu(x) = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

existiert.

#### Aufgabe 17

Es seien  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein Hilbertraum sowie  $S, T: H \rightarrow H$  lineare Operatoren. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

- (a) Ist  $S$  beschränkt und  $T$  kompakt, so sind  $S \circ T$  und  $T \circ S$  kompakt.  
(b) Ist  $T$  kompakt, so ist auch  $T^2$  kompakt.  
(c) Ist  $T^2$  kompakt, so ist auch  $T$  kompakt.  
(d) Gilt  $\dim(\text{Bild}(T)) < \infty$  und ist  $T$  beschränkt, so ist  $T$  kompakt.  
(e) Gilt  $\dim(\text{Bild}(T)) < \infty$ , so ist  $T$  kompakt.

### Aufgabe 18

Es seien  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  beschränkt und  $k \in C(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega})$ . Zeigen Sie, dass der Operator

$$K: (C(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (C(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_\infty), \quad u \mapsto (Ku)(x) := \int_{\Omega} k(x, y)u(y) dy$$

kompakt ist.

*Hinweis:* Satz von Arzelà-Ascoli:

Seien  $D \subset \mathbb{R}^n$  kompakt und  $f_j: D \rightarrow \mathbb{R}$  stetig mit:

(a)  $\forall x \in D \exists M = M(x) > 0 : |f_j(x)| \leq M \forall j \in \mathbb{N}$ .

(b)  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : x, y \in D, |x - y| < \delta \Rightarrow |f_j(x) - f_j(y)| < \varepsilon \forall j \in \mathbb{N}$ .

Dann hat die Funktionenfolge  $(f_j) \subset C(D)$  eine gleichmäßig konvergente Teilfolge.