Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
Dipl.-Math. Carlos Hauser

SS 2015
26.5.2015

Rand- und Eigenwertprobleme

7. Übungsblatt

Ziel dieses Übungsblattes ist es, die Bedingung $b_i \in C^1(\overline{\Omega})$ in der Definition des formal adjungierten Operators L^* (Definition 28) zu vermeiden. Dafür muss man die bisherige Theorie verallgemeinern auf Operatoren der Form

$$Lu = \sum_{i=1}^n \left(-\partial_i \Big(\sum_{j=1}^n a_{ij}(x) \partial_j u + \boldsymbol{d_i(x)} u \Big) + b_i(x) \partial_i u \right) + c(x) u$$

mit $a_{ij}, b_i, d_i, c \in L^\infty(\Omega)$ und $a_{ij} = a_{ji}$ für $i, j = 1, \ldots, n$. Im Folgenden sei Ω ein beschränktes Lipschitzgebiet und es gebe $\lambda > 0$ mit $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \lambda |\xi|^2$ $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$, $\forall x \in \Omega$.

Aufgabe 19 Sei $f \in L^2(\Omega)$.

(a) Leiten Sie eine geeignete schwache Formulierung her für die Probleme:

$$(D)_\mu \begin{cases} Lu + \mu u &= f \text{ in } \Omega, \\ u &= 0 \text{ auf } \partial\Omega. \end{cases} \qquad (N)_\mu \begin{cases} Lu + \mu u &= f \text{ in } \Omega, \\ (\nabla u)^T A(x) \nu(x) + d(x) \cdot \nu(x) u &= 0 \text{ auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

(b) Definieren Sie eine geeignete Bilinearform $B_\mu : W^{1,2}(\Omega) \times W^{1,2}(\Omega)$ mit der Eigenschaft:

(i) $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ löst $B_\mu[u, \phi] = \int_\Omega f \phi \, dx$ $\forall \phi \in W_0^{1,2}(\Omega) \Leftrightarrow u$ ist schwache Lösung von $(D)_\mu$.

(ii) $u \in W^{1,2}(\Omega)$ löst $B_\mu[u, \phi] = \int_\Omega f \phi \, dx$ $\forall \phi \in W^{1,2}(\Omega) \Leftrightarrow u$ ist schwache Lösung von $(N)_\mu$.

(c) Zeigen Sie: es existiert ein $\mu_0 \geq 0$ so, dass für $\mu \geq \mu_0$ gilt: $(\mathrm{D})_\mu$ bzw. $(\mathrm{N})_\mu$ hat genau eine schwache Lösung $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ bzw. $u \in W^{1,2}(\Omega)$.

Aufgabe 20

$$L^* u = \sum_{i=1}^n \left(-\partial_i \Big(\sum_{j=1}^n a_{ij}(x) \partial_j u + b_i(x) u \Big) + \boldsymbol{d_i(x)} \partial_i u \right) + c(x) u$$

sei der formal zu L adjungierte Operator.

(a) Zeigen Sie für $u, \phi \in W^{1,2}(\Omega)$: $B_\mu[u, \phi] = B_\mu^*[\phi, u]$.

(b) Zeigen Sie: sind $a_{ij}, b_i, d_i \in C^1(\overline{\Omega})$ und $u, \phi \in C^2(\overline{\Omega})$ so gilt

$$\int_\Omega \phi (Lu + \mu u) \, dx + \oint_{\partial\Omega} \phi R_L u \, d\sigma = \int_\Omega u (L^* \phi + \mu \phi) \, dx + \oint_{\partial\Omega} u R_{L^*} \phi \, d\sigma,$$

wobei

$$(R_L u)(x) := \nabla u(x)^T A(x) \nu(x) + d(x) \cdot \nu(x) u(x)$$
$$(R_{L^*} u)(x) := \nabla u(x)^T A(x) \nu(x) + b(x) \cdot \nu(x) u(x).$$