Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
Dipl.-Math. Carlos Hauser

SS 2015
2.6.2015

Rand- und Eigenwertprobleme

8. Übungsblatt

Aufgabe 21

Es sei $u \in W_0^{1,2}(0,1)$ eine schwache Lösung von

$$-u'' + b(x)u' + c(x)u = f(x) \quad \text{in } (0,1), \quad u(0) = u(1) = 0,$$

wobei $b, c \in L^\infty(0,1)$ und $f \in L^2(0,1)$. Zeigen Sie, dass $u \in W^{2,2}(0,1)$ gilt und dass u die Gleichung $-u''(x) + b(x)u'(x) + c(x)u(x) = f(x)$ punktweise fast überall in $(0,1)$ erfüllt.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst: Existiert ein $C > 0$ mit

$$\left| \int_0^1 u'\varphi' \, dx \right| \leq C\|\varphi\|_2 \quad \text{für alle } \varphi \in W_0^{1,2}(0,1),$$

so gilt $u \in W^{2,2}(0,1)$.

Aufgabe 22

Es sei Ω ein beschränktes Lipschitz-Gebiet. Betrachten Sie für $f \in L^2(\Omega)$ das Neumann-Randwertproblem

$$(1) \qquad \begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass (1) genau dann eine schwache Lösung besitzt, wenn $\int_\Omega f(x)\,dx = 0$ gilt.
Hinweis: Finden Sie wie im Fall des Dirichlet-Randwertproblems einen kompakten Operator $K\colon L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ so, dass (1) äquivalent zum Problem $(\mathrm{Id} - K)u = Kf$ ist. Sie können dabei ohne Beweis verwenden, dass die Einbettung $W^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ kompakt ist.

Aufgabe 23

Das Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sowie die beiden Teilgebiete $\Omega_1, \Omega_2 \subset \Omega$ seien gegeben durch

$$\begin{aligned} \Omega &:= (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_n, b_n), \\ \Omega_1 &:= (a_1, c) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_n, b_n), \\ \Omega_2 &:= (c, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_n, b_n) \end{aligned}$$

mit Konstanten $a_j < b_j$ und $c \in (a_1, b_1)$. Ferner sei $D := \overline{\Omega_1} \cap \overline{\Omega_2}$. Betrachten Sie für $i = 1, 2$ die Spuroperatoren

$$\begin{aligned} &T_i\colon W^{1,2}(\Omega_i) \to L^2(\partial\Omega_i), \\ &\tilde{T}_i\colon W^{1,2}(\Omega_i) \to L^2(D) \\ &\qquad \text{mit } \tilde{T}_i f = T_i f\big|_D \text{ für alle } f \in W^{1,2}(\Omega_i). \end{aligned}$$

Zeigen Sie:

— bitte wenden —

(a) Für alle $u \in W^{1,2}(\Omega_i)$ und $\varphi \in C^1(\overline{\Omega_i})$ gilt

$$\int_{\Omega_i} (u\partial_j\varphi + \varphi\partial_j u)\,dx = \oint_{\partial\Omega_i} (T_i u)\varphi\nu_j\,do \quad (i = 1, 2,\ j = 1, \ldots, n).$$

(b) $u \in W^{1,2}(\Omega)$ genau dann, wenn $u \in W^{1,2}(\Omega_i)$ $(i = 1, 2)$ und $\tilde{T}_1(u) = \tilde{T}_2(u)$.