Aufgabe 29

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Beweisen Sie: Es gibt keinen stetigen Spuroperator $T: L^2(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ mit $Tu = u|_{\partial\Omega}$ für $u \in C(\overline{\Omega})$ zu konstruieren.

Das Problem ist: Man bekommt keine Abschätzung der Form

Beweis $\|Tu\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq \text{Const} \|u\|_{L^2(\Omega)}$ $\forall u \in C(\overline{\Omega})$ wie im Fall "$T: W^{1,p}(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$"

Annahme: Es ex. ein stetiger Spuroperator $T: L^2(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ mit $Tu = u|_{\partial\Omega}$ für alle $u \in C(\overline{\Omega})$.

Betrachte die Funktion $u \equiv 1$ in $\overline{\Omega}$.

Da $u \in L^2(\Omega)$ (Ω ist n.V. beschränkt), ex. eine Folge $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\Omega)$ mit $u_k \xrightarrow{k\to\infty} u$ in $L^2(\Omega)$

[$C_c^\infty(\Omega)$ ist dicht in $L^p(\Omega)$ für $1 \leq p < \infty$, siehe z.B. 2.30 Corollary, Adams-Fournier, Sobolev-Spaces.] nach Satz 9, Abs. 2.2.

Aber: $\|Tu_k - Tu\|_{L^2(\partial\Omega)} = \|u_k|_{\partial\Omega} - u|_{\partial\Omega}\|_{L^2(\partial\Omega)}$

$$= \| \underbrace{u_k|_{\partial\Omega}}_{=0 \text{ f.ü. auf } \partial\Omega, \text{ da } u_k \in C_c^\infty(\Omega)} - \overbrace{u|_{\partial\Omega}}^{=1} \|_{L^2(\partial\Omega)} = \|1\|_{L^2(\partial\Omega)} = \underbrace{|\partial\Omega|}_{>0}{}^{1/2} \not\to 0 \quad (k \to \infty)$$

d.h. $Tu_k \not\to Tu$ in $L^2(\partial\Omega)$. ↯ zu T stetig. $\square$