Institut für Analysis
Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

Prof. Dr. Wolfgang Reichel

Rand- und Eigenwertprobleme – Sommersemester 2015
Handout zum Lebesgue-Integral

Quelle: W. Rudin, Real and Complex Analysis, 3^{rd} Ed., McGraw-Hill, 1987, Chapter 1–3.

Es sei X eine Grundmenge, z.B. $X = \mathbb{R}^n$, und $\mathcal{P}(X)$ = Menge aller Teilmengen von X.

Definition L.1 (σ-Algebra) *Ein Mengensystem $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt σ-Algebra, falls*

(i) $X \in \mathcal{M}$

(ii) $A \in \mathcal{M} \Longrightarrow X \setminus A \in \mathcal{M}$

(iii) $A_i \in \mathcal{M} \quad \forall i \in \mathbb{N} \Longrightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{M}$

Definition L.2 (positives Maß) *$\mathcal{M}$ sei eine σ-Algebra. Eine Abbildung $\mu : \mathcal{M} \to [0,\infty]$ heißt positives Maß, falls gilt*

$$A_i \in \mathcal{M} \quad \forall i \in \mathbb{N} \text{ mit } A_i \cap A_j = \emptyset \text{ für } i \neq j \Longrightarrow \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Es sei $I = I^1 \times \cdots \times I^n = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$ ein offenes Intervall des $\mathbb{R}^n$. Dann sei der Inhalt von I gegeben durch $|I| = (b_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_n - a_n)$. Dabei kann jedes einzelne Komponentenintervall I^i auch abgeschlossen oder halb-offen sein.

Definition L.3 (äußeres Maß im $\mathbb{R}^n$) *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine beliebige Menge. Dann heißt*

$$\lambda(A) := \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} |I_i| : \quad A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \text{ und } I_i \text{ beschränktes Intervall } \forall i \in \mathbb{N}\right\}$$

äußeres Maß der Menge A.

Bemerkung: λ ist kein positives Maß auf $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$.

Definition L.4 (Lebesguesche σ-Algebra; Carathéodory-Kriterium) *$A \subset \mathbb{R}^n$ heißt Lebesgue-messbar (kurz: $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$) falls gilt*

$$\lambda(E) = \lambda(A \cap E) + \lambda(A^c \cap E) \quad \forall E \subset \mathbb{R}^n.$$

Ist $X \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-messbar, dann sei $\mathcal{L}(X) = \{A \subset X : A \text{ ist Lebesgue-messbar}\}$.

Satz L.5 *$\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ ist eine σ-Algebra und das äußere Maß λ ist auf $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ ein positives, vollständiges, bewegungsinvariantes Maß, welches für Jordan-messbare Mengen mit dem Jordan-Maß übereinstimmt.*

Im folgenden sei $X \subset \mathbb{R}^n$ eine Lebesgue-messbare Menge. Für $f : X \to \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$ sei $f^+ = \max\{f, 0\}$, $f^- = -\min\{f, 0\}$, $f = f^+ - f^-$.

Definition L.6 (messbare Funktionen)

(i) Eine Funktion $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt messbar, falls $f^{-1}\big((\alpha, \infty]\big) \in \mathcal{L}(X)$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$.

(ii) Eine Funktion $s : X \to \mathbb{R}$ heißt Sprungfunktion, falls s nur endlich viele Werte $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ besitzt. Es gilt

$$s = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \chi_{A_i}, \quad A_i = s^{-1}(\alpha_i).$$

Definition L.7 (Lebesgue-Integral positiver Funktionen)

(i) Es sei $s = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \chi_{A_i}$ eine messbare Sprungfunktion. Dann heißt

$$\int_X s\,dx := \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \lambda(A_i)$$

Lebesgue-Integral von s über der Menge X.

(ii) Es sei $f : X \to [0, \infty]$ messbar. Dann heißt

$$\int_X f\,dx := \sup_{s \in \mathcal{S}} \int_X s\,dx, \quad \mathcal{S} = \{s : X \to \mathbb{R} \text{ messbare Sprungfunktion}, 0 \le s \le f\}$$

Lebesgue-Integral von f über der Menge X.

Definition L.8 (Lebesgue-Integral komplexwertiger Funktionen) *Es sei $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{R}}$ oder $\mathbb{C}$.*

$$\mathcal{L}^1(X) := \{f : X \to \mathbb{K} \text{ messbar } : \int_X |f|\,dx < \infty\}.$$

Für $f \in \mathcal{L}^1(X)$ sei $f_1 = \Re f, f_2 = \Im f$. Dann heißt

$$\int_X f\,dx := \int_X f_1^+\,dx - \int_X f_1^-\,dx + i\left(\int_X f_2^+\,dx - \int_X f_2^-\,dx\right)$$

Lebesgue-Integral von f über der Menge X.

Definition L.9 ($f = g$ f.ü.) *Sind $f, g : X \to \mathbb{K}$ messbar, dann heißt $f = g$* **fast überall**, *falls es eine Nullmenge N gibt mit $f(x) = g(x)\ \forall x \in X \setminus N$.* **Fast-überall Gleichheit** *ist eine Äquivalenzrelation.*

Definition L.10 *(Essentielles Supremum) Für eine messbare Funktion $F : X \to \overline{\mathbb{R}}$ ist*

$$\operatorname{ess\,sup} F := \inf\{s \in \overline{\mathbb{R}} : F(x) \le s \text{ f. ü. in } X\}.$$

Definition L.11 (Der Raum $L^p(X)$)

(a) Für $1 \leq p < \infty$ sei

$$L^p(X) = \{u : X \to \overline{\mathbb{R}} \text{ messbar: } \int_X |u|^p \, dx < \infty\}.$$

(b) Für $p = \infty$ sei

$$L^\infty(X) = \{u : X \to \overline{\mathbb{R}} \text{ messbar: } \operatorname{ess\,sup}_X |u| < \infty\}.$$

Definition L.12 (Norm auf $L^p(X)$) *Für $1 \leq p < \infty$ sei*

$$\|u\|_p := \left(\int_X |u|^p \, dx\right)^{1/p}$$

und

$$\|u\|_\infty := \operatorname{ess\,sup}_X |u|.$$

$(L^p(X), \|\cdot\|_p)$ ist ein Banach-Raum. Genauer: die Äquivalenzklassen in $L^p(X)$ bezüglich der f.ü.-Relation bilden einen Banach-Raum. $L^2(X)$ ist ein Hilbertraum mit $\langle f, g\rangle := \int_X f g \, dx$.

Satz L.13 (Minkowski und Hölder Ungleichung)

(i) $\|u + v\|_p \leq \|u\|_p + \|v\|_p$ für alle $u, v \in L^p(X)$.

(ii) Sei $1 \leq p, q \leq \infty$ so, dass $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt

$$\int_X |uv| \, dx \leq \|u\|_p \|v\|_q$$

für alle $u \in L^p(X)$ und alle $v \in L^q(X)$.

Satz L.14 *Sei $1 \leq p \leq \infty$ und $u \in L^p(X)$. Ist $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen in $L^p(X)$ mit $\lim_{k\to\infty} \|u_k - u\|_p = 0$, dann existiert eine Teilfolge $(u_{k_l})_{l\in\mathbb{N}}$ mit*

$$\lim_{l\to\infty} u_{k_l}(x) = u(x) \text{ für fast alle } x \in X.$$

Satz L.15 *Sei $1 \leq p < \infty$. Die Menge $C_c(X)$ der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger ist dicht in $L^p(X)$.*

Satz L.16 (Dualraum von $L^p(X)$) *Sei $1 \le p < \infty$ und sei $\phi : L^p(X) \to \mathbb{R}$ ein stetiges lineares Funktional. Dann gibt es genau eine Funktion $v \in L^q(X)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ mit*

$$\phi(u) = \int_X uv\,dx \text{ für alle } u \in L^p(X).$$

Kurz: $(L^p(X))^* = L^q(X)$.

Beachte: Im Allgemeinen ist dieser Satz falsch für $p = \infty$, d.h., $(L^\infty(X))^* \supsetneq L^1(X)$.

Definition L.17 (Lokal integrierbare Funktionen) *Sei $1 \le p \le \infty$.*

$$L^p_{loc}(X) = \{u : X \to \overline{\mathbb{R}} \text{ messbar mit } u \in L^p(K) \text{ für jede kompakte Menge } K \subset X\}.$$

$L^p_{loc}(X)$ ist ein Vektorraum.

Satz L.18 (Monotone Konvergenz) *Sei $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge messbarer Funktionen auf X mit*

$$0 \le u_1 \le u_2 \le u_3 \le \ldots.$$

Dann existiert $u(x) := \lim_{k\to\infty} u_k(x)$ für fast alle $x \in X$ und

$$\lim_{k\to\infty} \int_X u_k\,dx = \int_X u\,dx.$$

Satz L.19 (Dominierte Konvergenz) *Sei $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge messbarer Funktionen auf X. Falls eine Funktion $w \in L^1(X)$ existiert mit $|u_k(x)| \le w(x)$ für fast alle $x \in X$ und alle $k \in \mathbb{N}$ und falls $u(x) := \lim_{k\to\infty} u_k(x)$ fast überall auf X existiert, dann gilt*

$$\lim_{k\to\infty} \int_X u_k\,dx = \int_X u\,dx.$$

Satz L.20 (Fatous Lemma) *Sei $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge messbarer Funktionen auf X mit $u_k(x) \ge 0$ fast überall auf X. Dann gilt*

$$\int_X \liminf_{k\in\mathbb{N}} u_k\,dx \le \liminf_{k\in\mathbb{N}} \int_X u_k\,dx.$$