Karlsruher Institut für Technologie (KIT) SS 2013
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
Dipl.-Math. Dagmar Roth

Rand- und Eigenwertprobleme
1. Übungsblatt

Aufgabe 1

Bestimmen Sie alle Eigenwerte $\lambda \in \mathbb{C}$ und Eigenfunktionen des Problems

$$-v''(x) + v'(x) = \lambda v(x), \quad x \in [0, \pi], \qquad v(0) = v(\pi), \quad v'(0) = v'(\pi).$$

Aufgabe 2

Sei $r(t) = \sin(\tilde{\omega} t)$, $\tilde{\omega} \in \mathbb{R}$ fest sowie $\gamma, \omega \in \mathbb{R}$. Die Differentialgleichung

$$u'' + \gamma u' + \omega^2 u = r$$

beschreibt einen harmonischen Oszillator mit Reibung. Bestimmen Sie in Abhängigkeit von γ und ω die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

Aufgabe 3

Die Bewegung eines mathematischen Pendels wird beschrieben durch ($\omega > 0$):

$$(*) \qquad \varphi''(t) + \omega^2 \sin \varphi(t) = 0.$$

a) Es sei $\varphi : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ eine Lösung von $(*)$ mit $\varphi(0) = 0$. Beweisen Sie die Identität

$$[\varphi'(t)]^2 - 2\omega^2 \cos \varphi(t) = [\varphi'(0)]^2 - 2\omega^2, \quad t \in [0, \infty).$$

b) Sei φ wie in a) und zusätzlich gelte $\varphi'(0) > 2\omega$. Zeigen Sie, dass die Bewegung des Pendels „periodisch“ ist im folgenden Sinne: Es gilt $\varphi(t + T) = \varphi(t) + 2\pi$ wobei T gegeben ist durch

$$T = \frac{1}{\varphi'(0)} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4\omega^2}{[\varphi'(0)]^2} \sin^2(\frac{y}{2})}} \, dy.$$

c) Beschreiben Sie die Bewegung des Pendels bei Anfangsbedingungen $\varphi(0) = 0$ und $\varphi'(0) = 2\omega$ (bzw. $\varphi(0) = 0$ und $\varphi'(0) < 2\omega$).

Besprechung in der Übung am 24.4.2013