Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
Dipl.-Math. Dagmar Roth

SS 2013

Rand- und Eigenwertprobleme
10. Übungsblatt

Aufgabe 31

Sei H ein Hilbertraum und $A : D(A) \to H$ ein linearer, dicht definierter Operator. Zeigen Sie: A^* ist abgeschlossen.

Aufgabe 32

Es sei $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Hilbertraum und $A : D(A) \to H$ ein linearer, dicht definierter, symmetrischer Operator. Zeigen Sie die paarweise Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) A ist selbstadjungiert.

(ii) A ist abgeschlossen und $\mathrm{Kern}(A^* \pm i) = \{0\}$.

(iii) $\mathrm{Bild}(A \pm i) = H$.

Beweisen Sie außerdem, dass auch folgende Aussagen paarweise äquivalent sind:

(a) A ist wesentlich selbstadjungiert.

(b) $\mathrm{Kern}(A^* \pm i) = \{0\}$.

(c) $\mathrm{Bild}(A \pm i)$ ist dicht in H.

Hinweis: Beweisen Sie zur Vorbereitung das folgende
Lemma. Sei $A : D(A) \to H$ linear und dicht definiert.

(1) Es gilt $\mathrm{Kern}(A^* \mp i) = \mathrm{Bild}(A \pm i)^\perp$.

(2) A sei abgeschlossen und symmetrisch. Dann ist $\mathrm{Bild}(A \pm i)$ abgeschlossen.

Aufgabe 33

Sei H ein Hilbertraum und $A : D(A) \to H$ linear, dicht definiert, positiv semi-definit und selbstadjungiert. Beweisen Sie, dass $A - \lambda$ surjektiv ist für alle $\lambda < 0$.

Bitte wenden!

Aufgabe 34

Es sei $v \in L^2((0,1))$ und $u := \int\limits_0^{\cdot} v(t)\,dt$. Zeigen Sie, dass $u \in H^1_{\{0\}}((0,1)) = \overline{C_0^\infty((0,1])}^{\|\cdot\|_{1,2}}$ gilt mit $u' = v$.

Hinweis: Approximieren Sie v durch eine Folge in $C_0^\infty((0,1])$.

Aufgabe 35

Gegeben sei der Operator $A : H^1_{\{0\}}((0,1)) \to L^2((0,1))$, definiert durch $Au = iu'$. Untersuchen Sie A auf Abgeschlossenheit, Symmetrie und Selbstadjungiertheit.

Welche dieser Eigenschaften bleiben dieselben und welche ändern sich, wenn der Definitionsbereich des Operators durch $H^1_0((0,1))$ ersetzt wird?

Besprechung in der Übung am 26.6.2013