Karlsruher Institut für Technologie (KIT) SS 2013
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
Dipl.-Math. Dagmar Roth

Rand- und Eigenwertprobleme
Lösungsvorschläge zum 10. Übungsblatt

Aufgabe 31

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $D(A^*)$ mit $x_n \to x \in H$, $A^*x_n \to z \in H$. Zeige: $x \in D(A^*)$ und $z = A^*x$.
Für alle $y \in D(A)$ gilt:

$$\langle Ay, x\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle Ay, x_n\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle y, A^*x_n\rangle = \langle y, z\rangle.$$

Nach Definition von A^* und $D(A^*)$ folgt: $x \in D(A^*)$ und $z = A^*x$.

Aufgabe 32

Wir beweisen zunächst das Lemma.

(1) „$\supseteq$" Sei $y \in \text{Bild}(A+i)^\perp$. Dann gilt $\langle (A+i)z, y\rangle = 0 = \langle z, 0\rangle$ für alle $z \in D(A)$. Nach Definition des adjungierten Operators folgt $(A^* - i)y = 0$, d.h. $y \in \text{Kern}(A^* - i)$.

„$\subseteq$" Sei $y \in \text{Kern}(A^* - i)$. Dann gilt für alle $z \in D(A)$: $0 = \langle z, (A^* - i)y\rangle = \langle (A+i)z, y\rangle$, also $y \in \text{Bild}(A+i)^\perp$.

Beachte, dass aus der Aussage insbesondere folgt:

$$\text{Kern}(A^* \mp i) = \{0\} \iff \text{Bild}(A \pm i) \text{ dicht in } H.$$

(2) Da A symmetrisch ist, gilt $\langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}$ für alle $x \in D(A)$ (denn $\langle Ax, x\rangle = \langle x, Ax\rangle = \overline{\langle Ax, x\rangle}$). Es folgt

$$\|(A+i)x\|^2 = \|Ax\|^2 + \|x\|^2 + 2\,\text{Re}\langle Ax, ix\rangle = \|Ax\|^2 + \|x\|^2 \geq \|x\|^2.$$

Also existiert $(A+i)^{-1} : \text{Bild}(A+i) \to D(A)$ und ist stetig. Sei nun $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $D(A)$ mit $(A+i)x_n \to y \in \overline{\text{Bild}(A+i)}$. $((A+i)x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist also eine Cauchyfolge in $\text{Bild}(A+i)$ und mit der Stetigkeit von $(A+i)^{-1}$ folgt, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $D(A)$ ist. Somit existiert $\lim_{n\to\infty} x_n =: x \in H$ und es gilt $Ax_n = y - ix$. Da A abgeschlossen ist, ist $x \in D(A)$ und $y - ix = Ax$, d.h. $y = (A+i)x \in \text{Bild}(A+i)$. Für $A - i$ zeigt man die Behauptung analog.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Nach Aufgabe 31 folgt aus der Selbstadjungiertheit von A die Abgeschlossenheit von A. Sei nun $x \in \text{Kern}(A^* + i)$, d.h. $\|(A^* + i)x\| = 0$. Da A^* insbesondere symmetrisch ist, folgt aus dem Beweis des Hilfslemmas $0 = \|(A^* + i)x\|^2 \geq \|x\|^2$, also $x = 0$. Analog zeigt man die Implikation für $A^* - i$.
(ii) $\Rightarrow$ (iii): Mit Teil (1) aus dem Hilfslemma folgt: $\text{Bild}(A \pm i)$ dicht in H und Teil (ii) impliziert die Abgeschlossenheit von $\text{Bild}(A \pm i)$. Also folgt $\text{Bild}(A \pm i) = H$.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Nach Definition gilt wegen der Symmetrie von A: $D(A) \subseteq D(A^*)$ und $Ax = A^*x$ für alle $x \in D(A)$. Es bleibt also nur noch zu zeigen: $D(A^*) \subseteq D(A)$. Sei dazu $y \in D(A^*)$. Wegen $A^* : D(A^*) \to H$ gilt dann $(A^* - i)y \in H$ und nach Voraussetzung ex. ein $x \in D(A)$ mit

$$(A^* - i)y = (A - i)x.$$

Da $Ax = A^*x$ für alle $x \in D(A)$ folgt

$$(A^* - i)y = (A^* - i)x \;\Rightarrow\; (A^* - i)(y - x) = 0 \;\Rightarrow\; y - x \in \mathrm{Kern}(A^* - i)$$

Mit dem Hilfslemma erhalten wir $y - x \in \mathrm{Bild}(A + i)^\perp \overset{\text{(iii)}}{=} H^\perp = \{0\}$ und schließlich $y = x \in D(A)$.

Nun zur Äquivalenz der Aussagen (a), (b) und (c):

(a) $\iff$ (b): Nach Definition gilt: A wesentlich selbstadjungiert $\iff$ $\bar{A}$ ist selbstadjungiert. Mit der Äquivalenz (i) $\iff$ (ii) gilt also

$$A \text{ wesentlich selbstadjungiert} \iff \underbrace{\bar{A} \text{ abgeschlossen}}_{\text{immer erfüllt}} \text{ und } \mathrm{Kern}((\bar{A})^* \pm i) = \{0\}.$$

Wir zeigen: $\mathrm{Kern}((\bar{A})^* \pm i) = \mathrm{Kern}(A^* \pm i)$, was schließlich die Äquivalenz beweist.

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{Kern}(A^* \pm i) &\overset{D(A) \text{ dicht in } H}{\iff} \langle y, (A^* \pm i)x \rangle = 0 \quad \text{für alle } y \in D(A) \\ &\iff \langle (A \mp i)y, x \rangle = 0 \quad \text{für alle } y \in D(A) \\ &\overset{Ay = \bar{A}y \text{ für } y \in D(A)}{\iff} \langle (\bar{A} \mp i)y, x \rangle = 0 \quad \text{für alle } y \in D(A) \\ &\iff \langle y, ((\bar{A})^* \pm i)x \rangle = 0 \quad \text{für alle } y \in D(A) \\ &\overset{D(A) \text{ dicht in } H}{\iff} x \in \mathrm{Kern}((\bar{A})^* \pm i). \end{aligned}$$

(b) $\iff$ (c): s. Lemma

Aufgabe 33

In Verallgemeinerung des Lemmas in Aufgabe 32 kann man beweisen: Ist $T : D(T) \to H$ linear und dicht definiert, so gilt: $\mathrm{Kern}(T^*) = \mathrm{Bild}(T)^\perp$ (Beweis geht analog wie oben).

Wir zeigen zuerst, dass $\mathrm{Bild}(A - \lambda)$ abgeschlossen ist. Dabei gehen wir wie im Beweis von Teil (2) des Lemmas in Aufgabe 32 vor: Für alle $x \in D(A)$ gilt:

$$\begin{aligned} \|(A - \lambda)x\|^2 &\overset{A \text{ symm.}}{=} \|Ax\|^2 - 2\lambda \langle Ax, x \rangle + \lambda^2 \|x\|^2 \\ &\overset{A \text{ pos. semidef, } \lambda<0}{\geq} \|Ax\|^2 + \lambda^2 \|x\|^2 \geq \lambda^2 \|x\|^2 \end{aligned}$$

Da $\lambda < 0$ ist $A - \lambda : D(A) \to H$ injektiv und somit existiert $(A - \lambda)^{-1} : \mathrm{Bild}(A - \lambda) \to D(A)$ und ist stetig. Nun geht die Argumentation genauso wie im Beweis des Lemmas.

Da $A - \lambda$ injektiv ist, gilt $\mathrm{Kern}(A - \lambda) = \{0\}$. Damit folgt: $\mathrm{Bild}(A - \lambda)$ ist dicht in H und aufgrund der Abgeschlossenheit des Bildes gilt $\mathrm{Bild}(A - \lambda) = H$.

Aufgabe 34

Da $C_0^\infty((0,1])$ dicht in $L^2((0,1))$ liegt (bzgl. der L^2-Norm), ex. zu $v \in L^2((0,1))$ eine Folge $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C_0^\infty((0,1])$ mit $\|v_n - v\|_2 \to 0$. Da $\int_0^x v_n(t)\,dt \in C_0^\infty((0,1])$ gilt folgt mit partieller Integration für alle $\varphi \in C_0^\infty((0,1))$:

$$\int_0^1 \left(\int_0^x v_n\,dt\right)\varphi'\,dx = -\int_0^1 v_n\varphi\,dx \to \int_0^1 v\varphi\,dx \quad (n\to\infty)$$

Die linke Seite der Gleichung konvergiert gegen $\int_0^1 \left(\int_0^x v\,dt\right)\varphi'\,dx$, was die Gleichheit

$$\int_0^1 \left(\int_0^x v\,dt\right)\varphi'\,dx = -\int_0^1 v\varphi\,dx \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty((0,1))$$

impliziert. Also ist u schwach differenzierbar und $u' = v$.
Da $v_n \in C_0^\infty((0,1])$, gilt auch $\int_0^\cdot v_n\,dt \in C_0^\infty((0,1])$. Wir zeigen: $\int_0^\cdot v_n\,dt \to u$ bzgl. der H^1-Norm, woraus nach Definition von $H^1_{\{0\}}((0,1))$ folgt: $u \in H^1_{\{0\}}((0,1))$:

$$\begin{aligned}
\left\|u - \int_0^\cdot v_n\,dt\right\|_{1,2}^2 &= \left\|u - \int_0^\cdot v_n\,dt\right\|_2^2 + \left\|u' - \left(\int_0^\cdot v_n\,dt\right)'\right\|_2^2 \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^x (v-v_n)\,dt\right)^2 dx + \|v-v_n\|_2^2 \\
&\overset{\text{CSU}}{\leq} \int_0^1 x \int_0^x (v-v_n)^2\,dt\,dx \leq C\|v-v_n\|_2^2 \to 0 \quad (n\to\infty)
\end{aligned}$$

Aufgabe 35

Wir bemerken zunächst: $H^1_{\{0\}}((0,1)) = \left\{u \in H^1((0,1)) :\ u = \int_0^\cdot u'\,dt\right\}$.
"$\subseteq$" Ist $u \in H^1_{\{0\}}((0,1))$, so folgt $u' \in L^2((0,1))$ und nach Aufgabe 34 gilt: $v = \int_0^\cdot u'\,dt \in H^1_{\{0\}}((0,1))$ sowie $v' = u'$. Dies impliziert $u - v = \text{const}$ f.ü. in $(0,1)$ und da auch $u - v \in H^1_{\{0\}}((0,1))$ gilt, muss const $= 0$ f.ü. in $(0,1)$ folgen, also $u = v = \int_0^\cdot u'\,dt$.
"$\supseteq$" Aufgabe 34
Abgeschlossenheit: Sei $(u_n) \in D(A) = H^1_{\{0\}}((0,1))$ und $u, v \in L^2((0,1))$ mit $u_n \to u$ sowie $Au_n = iu_n' \to iv$ in $L^2((0,1))$. Zeige: $u \in D(A)$ und $Au = iv$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\left|\underbrace{\int_0^x iu_n'\,dt}_{=iu_n} - \int_0^x iv\,dt\right| &\leq \int_0^x |iu_n' - iv|\,dt \leq \int_0^1 |iu_n' - iv|\,dt \overset{\text{CSU}}{\leq} \left(\int_0^1 |iu_n' - iv|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|Au_n - iv\|_2 \to 0 \quad (n\to\infty),
\end{aligned}$$

d.h. $iu_n \to \int_0^\cdot iv\,dt = iu$ in $L^2((0,1))$ (wegen der Eindeutigkeit des Grenzwertes). Da $u = \int_0^\cdot v\,dt$ und $v \in L^2((0,1))$ folgt $u \in D(A)$ und $u' = v$, also schließlich $Au = iu' = iv$.
Symmetrie: Seien $u, v \in D(A)$. Dann gilt (beachte, dass $H^1((0,1))$ in $C((0,1))$ einbettet)

$$\langle Au, v\rangle = \int_0^1 iu'\overline{v}\,dx = -\int_0^1 iu\overline{v'}\,dx + iu\overline{v}\big|_0^1 = \int_0^1 u\overline{iv'}\,dx + iu(1)\overline{v}(1) = \langle u, Av\rangle + iu(1)\overline{v}(1).$$

A ist nicht symmetrisch und somit kann A auch nicht selbstadjungiert sein.

Es gelte nun $D(A) = H_0^1((0,1))$. Man kann nun zeigen:
$H_0^1((0,1)) = \Big\{u \in H^1((0,1)) : \; u = \int_0^{\cdot} u'\,dx \text{ und } \underbrace{\int_0^1 u'\,dx}_{=u(1)} = 0\Big\}$.

Abgeschlossenheit: Sei $u_n \in H_0^1((0,1))$ und $u, v \in L^2((0,1))$ mit $u_n \to u$ sowie $Au_n = iu_n' \to iv \in L^2((0,1))$. Zeige: $u \in H_0^1((0,1))$ und $Au = iv$. Wie oben: $iu_n \to \int_0^{\cdot} iv\,dt = iu$ in $L^2((0,1))$. Außerdem gilt $0 = \int_0^1 u_n\,dt \to \int_0^1 v\,dt$ und wie vorher folgt $u \in D(A)$, $u' = v$, $Au = iu' = iv$.
Symmetrie: Mit der Rechnung von oben sieht man sofort, dass $A : H_0^1((0,1)) \to L^2((0,1))$ symmetrisch ist.
Selbstadjungiertheit: Wir zeigen: $D(A^*) \supsetneq D(A)$: Sei $w \in H^1((0,1))$. Dann gilt für alle $u \in D(A) = H_0^1((0,1))$:

$$\langle Au, w\rangle = \int_0^1 iu'\,\overline{w}\,dx = -\int_0^1 ui\,\overline{w'}\,dx = \int_0^1 u\,\overline{iw'}\,dx = \langle u, iw'\rangle$$

Damit folgt nach Definition: $w \in D(A^*)$ und somit $H^1((0,1)) \subseteq D(A^*)$.

Bemerkung zum Beweis von $H_0^1((0,1)) = \Big\{u \in H^1((0,1)) : \; u = \int_0^{\cdot} u'\,dx \text{ und } \int_0^1 u'\,dx = 0\Big\}$:
Beh.: $v \in L^2((0,1)), u := \int_0^{\cdot} v(t)\,dt, \; \int_0^1 v(t)\,dt = 0 \;\Rightarrow\; u \in H_0^1((0,1))$ und $u' = v$.
Bew.: Zeige: Es ex. eine Folge $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C_0^\infty((0,1))$ mit $v_n \to v$ in $L^2(0,1)$ und $\int_0^1 v_n\,dx = 0$. Dann kann man im Beweis wie in Aufgabe 34 vorgehen und erhält zusätzlich $0 = \int_0^1 v_n\,dx \to \int_0^1 v\,dx = \int_0^1 u'\,dx$.
Da $C_0^\infty((0,1))$ dicht in $L^2((0,1))$ ex. $(\tilde{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\tilde{v}_n \to u$ in $L^2((0,1))$. Wähle $\theta \in C_0^\infty((0,1))$ mit $\int_0^1 \theta\,dx > 0$. Definiere nun

$$v_n := \tilde{v}_n - \frac{\int_0^1 \tilde{v}_n\,dx}{\int_0^1 \theta\,dx}\theta.$$

Dann gilt: $v_n \in C_0^\infty((0,1))$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und

$$\int_0^1 v_n\,dx = 0.$$

Außerdem gilt $v_n \to v$ in $L^2((0,1))$ da $\int \tilde{v}_n\,dx \to \int_0^1 v\,dx = 0$.