Karlsruher Institut für Technologie (KIT) SS 2013
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
Dipl.-Math. Dagmar Roth

Rand- und Eigenwertprobleme
11. Übungsblatt

Aufgabe 36

Es sei $D(A) = H^2(\mathbb{R}^n)$ und $A : D(A) \to L^2(\mathbb{R}^n),\ Au := -\Delta u$. Zeigen Sie: $\sigma(A) = [0, \infty)$.
Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass A selbstadjungiert ist.

Aufgabe 37

Es sei H ein Hilbertraum, $D(B) \subseteq H$ und $B : D(B) \times D(B) \to \mathbb{C}$ eine dicht definierte, nichtnegative und abgeschlossene Sesquilinearform. Nach Vorlesung existiert ein dicht definierter, nichtnegativer Operator $A : D(A) \to H$ mit den Eigenschaften

(i) $D(A) \subseteq D(B)$ und $B[u, v] = \langle Au, v\rangle$ für alle $u \in D(A),\ v \in D(B)$

(ii) Falls $u \in D(B),\ w \in H$ und $B[u, v] = \langle w, v\rangle$ für alle $v \in D(B)$ gilt, so folgt $u \in D(A)$ und $Au = w$.

Zeigen Sie die Abgeschlossenheit von A.

Aufgabe 38

Sei $H = L^2(\mathbb{R})$, $D(B) := \{u \in L^2(\mathbb{R}) :\ \int_{\mathbb{R}} |x||u(x)|^2\, dx < \infty\}$ und $B[u, v] : D(B) \times D(B) \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$B[u, v] := \int_{\mathbb{R}} |x|u(x)\overline{v(x)}\, dx.$$

Zeigen Sie, dass ein selbstadjungierter Operator A existiert, der B repräsentiert und bestimmen Sie dessen Definitionsbereich $D(A)$ explizit.

Bitte wenden!

Aufgabe 39

Es sei H ein Hilbertraum, $D(A) \subseteq H$ und $A : D(A) \to H$ ein selbstadjungierter Operator mit der Eigenschaft $\langle Au, u\rangle \geq c\langle u, u\rangle$ für ein $c \in \mathbb{R}$ und alle $u \in D(A)$. Weiter sei V ein symmetrischer Operator mit $D(A) \subseteq D(V)$. Beweisen Sie:

Falls $a, b \in \mathbb{R}$ existieren mit $0 \leq a < 1$, $b \geq 0$ und

$$(*) \quad \|V\phi\| \leq a\|A\phi\| + b\|\phi\| \quad (\text{für alle } \phi \in D(A))$$

so ist $A + V$ selbstadjungiert auf $D(A)$.

Hinweis: Sei $a_0 := \inf\{a : \ (*) \text{ gilt für ein } b \geq 0\}$. Zeigen Sie:

$$\limsup_{\lambda \to \infty} \|V(A + \lambda)^{-1}\| \leq a_0.$$

Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass gilt:

$$\|A(A + \lambda)^{-1}\| = \sup_{s \in \sigma(A)} \left|\frac{s}{s + \lambda}\right|.$$

Besprechung in der Übung am 3.7.2013