Karlsruher Institut für Technologie (KIT) SS 2013
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
Dipl.-Math. Dagmar Roth

Rand- und Eigenwertprobleme
Lösungsvorschläge zum 11. Übungsblatt

Aufgabe 36

Der Beweis geht fast analog zum eindimensionalen Fall.
Partielle Integration zeigt, dass A ein positiv semidefiniter Operator ist und somit gilt nach Vorlesung, dass $\sigma(A) \subseteq [0,\infty)$ (da A auch selbstadjungiert).
Sei nun $\lambda \in [0,\infty)$ und $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ eine glatte Abschneidefunktion mit $\psi(x) = 1$ für $|x| \leq 1$ und $\psi(x) = 0$ für $|x| \geq 2$. Für $k \in \mathbb{N}$ definiere $\psi_k(x) = \psi\left(\frac{|x|}{k}\right)$. Es gilt:

$$\frac{\partial \psi_k}{\partial x_i}(x) = \frac{1}{k}\psi'\left(\frac{|x|}{k}\right)\frac{x_i}{|x|} \qquad \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial x_i^2}(x) = \frac{1}{k^2}\psi''\left(\frac{|x|}{k}\right)\frac{x_i^2}{|x|^2} + \frac{1}{n}\psi'\left(\frac{|x|}{k}\right)\left(\frac{1}{|x|} - \frac{x_i^2}{|x|^3}\right)$$

Für $v_k(x) := \psi_k(x)e^{-i\sqrt{\lambda}x_1}$ gilt:

$$\|v_k\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^n} \left|\psi\left(\frac{|x|}{k}\right)\right|^2 dx \geq \int_{B_k(0)} 1\,dx = Ck^n$$

sowie

$$\begin{aligned}
-\Delta v_k(x) &= -\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\left(\psi_k(x)e^{-i\sqrt{\lambda}x_1}\right) \\
&= -\left(\sum_{j=1}^n \left[\frac{1}{k^2}\psi''\left(\frac{|x|}{k}\right)\frac{x_j^2}{|x|^2} + \frac{1}{k}\psi'\left(\frac{|x|}{k}\right)\left(\frac{1}{|x|} - \frac{x_j^2}{|x|^3}\right)\right] - \frac{2}{k}\psi'\left(\frac{|x|}{k}\right)\frac{x_1}{|x|}i\sqrt{\lambda} - \psi_k(x)\lambda\right)e^{-i\sqrt{\lambda}x_1} \\
&= \left(-\frac{1}{k^2}\psi''\left(\frac{|x|}{k}\right) - \frac{n-1}{k}\psi'\left(\frac{|x|}{k}\right) + \frac{2}{k}\psi'\left(\frac{|x|}{k}\right)\frac{x_1}{|x|}i\sqrt{\lambda} + \psi_k(x)\lambda\right)e^{-i\sqrt{\lambda}x_1}.
\end{aligned}$$

Definiere $u_k = v_k\|v_k\|^{-1}$ $(k \in \mathbb{N})$. Offenbar $\|u_k\| = 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und es gilt:

$$\begin{aligned}
\|-\Delta u_k - \lambda u_k\|_2^2 &= \|v_k\|_2^{-2}\|-\Delta v_k - \lambda v_k\|_2^2 \\
&= \|v_k\|_2^{-2}\int_{B_{2k}(0)} \left|-\frac{1}{k^2}\psi''\left(\frac{|x|}{k}\right) - \frac{n-1}{k}\psi'\left(\frac{|x|}{k}\right) + \frac{2}{k}\psi'\left(\frac{|x|}{k}\right)\frac{x_1}{|x|}i\sqrt{\lambda}\right|^2 dx \\
&\leq \|v_k\|_2^{-2}\int_{B_{2k}(0)} \left(\frac{C}{k^2} + \frac{C}{k}(n-1+2\sqrt{\lambda})\right)^2 dx \\
&\leq \frac{C}{k^n}\left(\frac{C}{k^2} + \frac{C}{k}(n-1+2\sqrt{\lambda})\right)^2 (2k)^n \to 0 \quad (k \to \infty)
\end{aligned}$$

Mit Theorem V.2 folgt $\lambda \in \sigma(A)$.

Aufgabe 37

Wir beweisen zunächst

Lemma: B erfülle die Voraussetzungen in der Aufgabenstellung. Dann gilt für $u, v \in D(B)$:

$$|B[u,v]| \leq B[u,u]^{\frac{1}{2}} B[v,v]^{\frac{1}{2}}.$$

Beweis (Ann.: $B[v,v] = 0$)

$$\begin{aligned}
0 &\leq B\left[B[v,v]u - B[u,v]v, B[v,v]u - B[u,v]v\right] \\
&= B\left[B[v,v]u, B[v,v]u\right] - B\left[B[v,v]u, B[u,v]v\right] - B[B[u,v]v, B[v,v]u] + B[B[u,v]v, B[u,v]v] \\
&= |B[v,v]|^2 B[u,u] - B[v,v] \underbrace{\overline{B[u,v]}B[u,v]}_{=|B[u,v]|^2} - B[v,v] \underbrace{B[u,v]B[v,u]}_{=|B[u,v]|^2} + |B[u,v]|^2 B[v,v] \\
&= |B[v,v]|^2 B[u,u] - B[v,v]|B[u,v]|^2 \\
&\Rightarrow |B[u,v]|^2 \leq B[u,u]B[v,v]
\end{aligned}$$

Ist $B[v,v] = 0$ und $B[u,u] \neq 0$ so tausche die Rollen von u und v. Im Fall $B[u,u] = B[v,v] = 0$ betrachte $B[u \pm v, u \pm v]$ sowie $B[u \pm iv, u \pm iv]$. Es folgt $\mathrm{Re}(B[u,v]) = \mathrm{Im}(B[u,v]) = 0$, und die Ungl. ist für alle $u, v \in D(B)$ bewiesen. □

Es sei nun $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D(A)$ eine Folge mit $u_n \to u \in H$, $Au_n \to w \in H$ $(n \to \infty)$. Zeige: $u \in D(A)$ und $Au = w$.

Es gilt: $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sowie $(Au_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind Cauchyfolgen, also folgt mit (i):

$$|B[u_n - u_m, u_n - u_m]| = |\langle A(u_n - u_m), u_n - u_m\rangle| \leq \|Au_n - Au_m\| \|u_n - u_m\| \to 0 \quad (n, m \to \infty),$$

d.h. $u_n \xrightarrow{B} u$. Da B abgeschlossen ist, folgt $u \in D(B)$ und $B[u_n - u, u_n - u] \to 0$ $(n \to \infty)$. Für $v \in D(B)$ erhalten wir damit:

$$|B[u_n, v] - B[u,v]| = |B[u_n - u, v]| \leq |B[u_n - u, u_n - u]|^{\frac{1}{2}} |B[v,v]|^{\frac{1}{2}} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Es folgt $B[u_n, v] \to B[u,v]$ $(n \to \infty)$. Andererseits gilt $B[u_n, v] = \langle Au_n, v\rangle \to \langle w, v\rangle$ $(n \to \infty)$, also muss gelten

$$B[u,v] = \langle w, v\rangle \quad \text{für alle } v \in D(B).$$

Mit (ii) folgt $u \in D(A)$ und $Au = w$, also die Abgeschlossenheit von A.

Aufgabe 38

$B[u,v]$ ist dicht definiert, da $C_0^\infty(\mathbb{R}) \subseteq D(B)$ und $C_0^\infty(\mathbb{R})$ dicht in $L^2(\mathbb{R}) = H$ liegt. Es ist leicht einzusehen, dass B positiv semidefinit, sesquilinear und hermitesch ist. Zeige nun die Abgeschlossenheit von B:

Sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D(B)$, $u_n \xrightarrow{B} u$, d.h. $u_n \to u$ in H und $B[u_n - u_m, u_n - u_m] \to 0$ $(n, m \to \infty)$. Wegen

$$B[u_n - u_m, u_n - u_m] = \int_{\mathbb{R}} |x|(u_n - u_m)\overline{(u_n - u_m)}\, dx = \int_{\mathbb{R}} \sqrt{|x|}(u_n - u_m)\overline{\sqrt{|x|}(u_n - u_m)}\ , dx$$

ist $\left(\sqrt{|\cdot|}u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $L^2(\mathbb{R})$ und es ex. $w \in L^2(\mathbb{R})$ mit $\sqrt{|\cdot|}u_n \to w$ in $L^2(\mathbb{R})$. Es existiert somit eine Teilfolge mit den Eigenschaften:

$$\begin{matrix} \sqrt{|\cdot|}u_{n_k} \to w & \text{punktweise fast überall} \\ \sqrt{|\cdot|}u_{n_k} \to \sqrt{|\cdot|}u & \text{punktweise fast überall} \end{matrix},$$

also $\sqrt{|\cdot|}u = w$ punktweise f.ü. in $\mathbb{R}$. Also gilt $\sqrt{|\cdot|}u \in L^2(\mathbb{R})$, d.h. $u \in D(B)$ und weiter $\sqrt{|\cdot|}u_n \to \sqrt{|\cdot|}u$ in $L^2(\mathbb{R})$. Mit

$$|B[u_n - u, u_n - u]| = \int_{\mathbb{R}} |x||u_n - u|^2 \, dx = \|\sqrt{|\cdot|}(u_n - u)\|_2^2 \to 0 \quad (n \to \infty)$$

folgt nun die Abgeschlossenheit von B.
Nach Satz VI.1 und dem 2. Korollar existiert ein selbstadjungierter Operator A mit $B[u,v] = \langle Au, v\rangle$ $(u \in D(A), v \in D(B))$. Es gilt also

$$\int_{\mathbb{R}} |x|u(x)\overline{v(x)} \, dx = B[u,v] = \langle Au, v\rangle = \int_{\mathbb{R}} (Au)(x)\overline{v(x)} \, dx$$

d.h. $(Au)(x) = |x|u(x)$. Definitionsbereich von A:

$$u \in D(A) \iff Au \in L^2(\mathbb{R}) \iff \int_{\mathbb{R}} |x|^2|u(x)|^2 \, dx < \infty.$$

Aufgabe 39

Beh. 1: Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > -c$ ist $(A+\lambda)^{-1} : H \to D(A)$ bijektiv und beschränkt.
Bew.:

(i) $\langle (A+\lambda)u, u\rangle \geq \underbrace{(c+\lambda)}_{>0} \|u\|_2^2$ $(u \in D(A)) \implies A + \lambda$ injektiv

(ii) A selbstadjungiert $\overset{\text{Aufg. 33}}{\implies}$ $A + \lambda$ surjektiv
(denn $A - c$ positiv semidef. und selbstadjungiert $\overset{\text{A 33}}{\Rightarrow}$ $A - c - \mu$ surjektiv für alle $\mu < 0$. Mit $\lambda = -c - \mu$ folgt die Beh.)

(iii) Sei $w \in H$. Es gilt (s. (i))

$$\begin{aligned} (c+\lambda)\|(A+\lambda)^{-1}w\|^2 &\leq (c+\lambda)\langle (A+\lambda)(A+\lambda)^{-1}w, (A+\lambda)^{-1}w\rangle \\ &= \langle w, (A+\lambda)^{-1}w\rangle \leq \|w\|\|(A+\lambda)^{-1}w\| \\ \Rightarrow \ (A+\lambda)^{-1} \text{ beschränkt und } & \|(A+\lambda)^{-1}\| \leq (c+\lambda)^{-1} \end{aligned}$$

□

Beh. 2: $\limsup\limits_{\lambda\to\infty} \|V(A+\lambda)^{-1}\| \leq a_0 := \inf\{a : \ (*) \text{ gilt für ein } b \geq 0\}$.
Bew.: Nach Definition von a_0 gilt: Es ex. eine Folge $(\delta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\delta_k \geq 0$ und $\delta_k \to 0$, sowie $b_{\delta_k} > 0$ so dass für alle $\phi \in H$ gilt:

$$(**) \quad \|V(A+\lambda)^{-1}\phi\| \leq (a_0 + \delta_k)\|A(A+\lambda)^{-1}\phi\| + b_{\delta_k}\|(A+\lambda)^{-1}\phi\|.$$

$A(A+\lambda)^{-1}$ ist beschränkt, da $A(A+\lambda)^{-1} = \underbrace{(A+\lambda)(A+\lambda)^{-1}}_{=I} - \underbrace{\lambda(A+\lambda)^{-1}}_{\text{beschränkt}}$. Mit $(**)$ folgt damit die Beschränktheit von $V(A+\lambda)^{-1}$.
Für die Norm von $A(A+\lambda)^{-1}$ gilt mit dem Hinweis:

$$\|A(A+\lambda)^{-1}\| = \sup_{s\in\sigma(A)} \left|\frac{s}{s+\lambda}\right| \leq 1 \quad \text{falls } \lambda \text{ genügend groß},$$

denn $s \in \sigma(A) \Rightarrow s \geq c$ (Ang. $s < c$. Dann gilt $(A-s)^{-1} = (A+(-s))^{-1}$ bijektiv nach Beh. 1, also $s \notin \sigma(A)$). Ist $s > 0$ so gilt für alle $\lambda \geq 0$: $s \leq s+\lambda$ und falls $c \leq s < 0$, so folgt $|s| \leq s+\lambda$ für $\lambda \geq 2|c|$.
Einsetzen in $(**)$ ergibt für λ genügend groß:

$$\|V(A+\lambda)^{-1}\| \leq (a_0 + \delta_k) + \underbrace{\frac{b_{\delta_k}}{c+\lambda}}_{\to 0 \ (\lambda \to \infty)}$$

Es folgt:

$$\limsup_{\lambda \to \infty} \|V(A+\lambda)^{-1}\| \leq a_0 + \delta_k$$

Für $k \to \infty$ folgt die Beh. $\square$
Wegen $a_0 < 1$ folgt nun $\|V(A+\lambda)^{-1}\| < 1$ falls λ genügend groß und somit (s. Lemma über Neumann'sche Reihe am Ende der Aufgabe) existiert $(I + V(A+\lambda)^{-1})^{-1} : H \to H$ und ist beschränkt (und bijektiv). Es gilt:

$$(A + V + \lambda) = (I + V(A+\lambda)^{-1})(A+\lambda)$$

und wegen $\text{Bild}(A+\lambda) = H$ folgt auch $\text{Bild}(A+V+\lambda) = H$ für λ genügend groß.
Offenbar ist $A+V : D(A) \to H$ ein symmetrischer, dicht definierter Operator. Die Selbstadjungiertheit von $A+V$ folgt, wenn wir zeigen können, dass $D(A^* + V^*) \subseteq D(A+V) = D(A)$ gilt. Sei also $\phi \in D(A^*+V^*)$. Da $\text{Bild}(A+V+\lambda) = H$, existiert $\psi \in D(A)$ mit $(A+V+\lambda)\psi = (A^*+V^*+\lambda)\phi$. Wegen der Symmetrie von $A+V+\lambda$ gilt $(A+V+\lambda)\psi = (A^*+V^*+\lambda)\psi$ und es folgt

$$\begin{aligned}(A^*+V^*+\lambda)(\psi-\phi) = 0 \ &\Rightarrow \langle (A^*+V^*+\lambda)(\psi-\phi), w\rangle = 0 \quad \text{für alle } w \in D(A)\\ &\Rightarrow \langle \psi-\phi, (A+V+\lambda)w\rangle = 0 \quad \text{für alle } w \in D(A).\end{aligned}$$

Da $\text{Bild}(A+V+\lambda) = H$ folgt $\langle \psi - \phi, \tilde{w}\rangle = 0$ für alle $\tilde{w} \in H$, also $\psi = \phi \in D(A)$.
Lemma (Neumann'sche Reihe): Sei $B : H \to H$ beschränkt, $\|B\| < 1$. Dann existiert $(I-B)^{-1} : H \to H$ und ist beschränkt.
Beweis: s. z.B. D. Werner, Funktionalanalysis, Satz II.1.11