Karlsruher Institut für Technologie (KIT) SS 2013
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
Dipl.-Math. Dagmar Roth

Rand- und Eigenwertprobleme
12. Übungsblatt

Aufgabe 40

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet und $\lambda_i(\Omega)$ bezeichne den i-ten Eigenwert des Dirichlet-Eigenwertproblems

$$u \in H_0^1(\Omega): \quad -\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \lambda \int_\Omega uv \, dx \quad \text{für alle } v \in H_0^1(\Omega).$$

Die Folge der Eigenwerte sei geordnet: $\lambda_1(\Omega) \leq \lambda_2(\Omega) \leq \ldots$.

a) Zeigen Sie: Ist $\Omega_1 \subset \Omega_2$ so gilt $\lambda_i(\Omega_2) \leq \lambda_i(\Omega_1)$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

b) Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a > b$ und

$$E := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \left(\tfrac{x}{a}\right)^2 + \left(\tfrac{y}{b}\right)^2 < 1 \right\}$$

eine Ellipse. Finden Sie optimale Einschließungen $\lambda_1(E) \in [\lambda_1(\Omega_1), \lambda_1(\Omega_2)]$, wobei $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^2$ achsenparallele Rechtecke mit $\Omega_2 \subset E \subset \Omega_1$ seien.

Aufgabe 41: Stetige Abhängigkeit der Eigenwerte von den Koeffizienten

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet.

a) Für $c \in L^\infty(\Omega)$ bezeichne $\lambda_i(c)$ den i-ten Eigenwert (nach Größe geordnet) des Eigenwertproblems

$$u \in H_0^1(\Omega), \quad \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega cuv \, dx = \lambda \int_\Omega uv \, dx \quad \text{für alle } v \in H_0^1(\Omega).$$

Zeigen Sie: Sind $c, \tilde{c} \in L^\infty(\Omega)$, so gilt:

$$|\lambda_i(c) - \lambda_i(\tilde{c})| \leq \|c - \tilde{c}\|_\infty \quad (i \in \mathbb{N}).$$

Bitte wenden!

b) Für $w \in L^\infty(\Omega)$ mit $w(x) \geq \underline{w} > 0$ $(x \in \Omega)$, $\underline{w}$ konstant, bezeichne $\lambda_i(w)$ den i-ten Eigenwert (nach Größe geordnet) des Eigenwertproblems

$$u \in H_0^1(\Omega), \qquad \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \lambda \int_\Omega wuv \, dx \quad \text{für alle } v \in H_0^1(\Omega).$$

Zeigen Sie: Sind $w, \tilde{w} \in L^\infty(\Omega)$ mit $w(x), \tilde{w}(x) > \underline{w} > 0$ $(x \in \Omega)$ und $\left\|1 - \frac{\tilde{w}}{w}\right\|_\infty < 1$ so gilt:

$$|\lambda_i(w) - \lambda_i(\tilde{w})| \leq \left\|1 - \frac{\tilde{w}}{w}\right\|_\infty \lambda_i(\tilde{w}) \quad (i \in \mathbb{N}).$$

Aufgabe 42

Betrachten Sie das Eigenwertproblem

$$(*) \qquad \begin{cases} -u''(x) &= \lambda(2+\sin(x))u(x) \quad \text{in } (0,\pi) \\ u(0) &= u(\pi) = 0 \end{cases}$$

a) Geben Sie eine schwache Formulierung mittels einer geeigneten Bilinearform B im Raum $L^2((0,\pi); g)$ an, wobei das Skalarpodukt durch $\langle u, v\rangle = \langle gu, v\rangle_{L^2}$, mit $g(x) = 2 + \sin(x)$ gegeben ist.

b) Berechnen Sie mit Hilfe des Rayleigh-Verfahrens eine obere Schranke $\overline{\lambda}_1$ für den ersten Eigenwert des Problems $(*)$.

   Hinweis: Verwenden Sie $\tilde{u}(x) = \sin(x)$ als Testfunktion.

c) Ermitteln Sie durch Vergleich von $(*)$ mit dem Problem

$$(**) \qquad \begin{cases} -u''(x) &= 3\mu u(x) \quad \text{in } (0,\pi) \\ u(0) &= u(\pi) = 0 \end{cases}$$

   eine untere Schranke ρ für den Eigenwert λ_2 mit $\overline{\lambda}_1 \leq \rho$.

d) Verwenden Sie das Lehmann-Verfahren, um eine untere Schranke $\underline{\lambda}_1$ für λ_1 zu berechnen. Bestimmen Sie hierzu ein geeignetes $w \in D(B)$.

Besprechung in der Übung am 10.7.2013