Karlsruher Institut für Technologie (KIT) SS 2013
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
Dipl.-Math. Dagmar Roth

Rand- und Eigenwertprobleme
Lösungsvorschläge zum 12. Übungsblatt

Aufgabe 40

a) Sei $u \in H_0^1(\Omega_1)$. Betrachte die Funktion $\tilde{u} = \begin{cases} u & \text{in } \Omega_1 \\ 0 & \text{in } \Omega_2 \backslash \Omega_1. \end{cases}$

Beh: $\tilde{u} \in H_0^1(\Omega_2)$.

Bew: $\tilde{u} \in L^2(\Omega_2)$ ist klar. Wir zeigen: $v_j = \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x_j} & \text{in } \Omega_1 \\ 0 & \text{in } \Omega_2 \backslash \Omega_1 \end{cases}$ ist die schwache Ableitung von $\tilde{u}$ nach x_j ($j = 1, \dots, n$). Sei $\phi \in C_0^\infty(\Omega_2)$. Dann gilt (beachte: Es ex. Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C_0^\infty(\Omega_1)$ mit $\|u_n - u\|_{1,2} \to 0$)

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_2} \tilde{u} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\, dx &= \int_{\Omega_1} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_{\Omega_1} u_n \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\, dx \\ &= -\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega_1} \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial x_j} \varphi\, dx = -\int_{\Omega_1} \frac{\partial u}{\partial x_j} \varphi\, dx = -\int_{\Omega_2} v_j \varphi\, dx\end{aligned}$$

Da $v_j \in L^2(\Omega_2)$ für alle $j \in \{1, \dots, n\}$, folgt $\tilde{u} \in H_0^1(\Omega_2)$. □

Wir können somit jede Funktion $u \in H_0^1(\Omega_1)$ als Funktion in $H_0^1(\Omega_2)$ auffassen (indem wir sie durch 0 in $\Omega_2 \backslash \Omega_1$ forsetzen), und haben in diesem Sinne $H_0^1(\Omega_1) \subset H_0^1(\Omega_2)$. Mit dem Min-Max-Prinzip von Poincare gilt nun für alle $i \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\lambda_i(\Omega_1) &= \min_{\substack{U\subseteq H_0^1(\Omega_1)\\ \dim U = i}} \max_{u\in U\backslash\{0\}} \frac{\int_{\Omega_1} |\nabla u|^2\, dx}{\int_{\Omega_1} u^2\, dx} \\ &\overset{u \text{ durch } 0 \text{ forts.}}{=} \min_{\substack{U\subseteq H_0^1(\Omega_1)\\ \dim U = i}} \max_{u\in U\backslash\{0\}} \frac{\int_{\Omega_2} |\nabla u|^2\, dx}{\int_{\Omega_2} u^2\, dx} \\ &\overset{H_0^1(\Omega_1)\subset H_0^1(\Omega_2)}{\geq} \min_{\substack{U\subseteq H_0^1(\Omega_2)\\ \dim U = i}} \max_{u\in U\backslash\{0\}} \frac{\int_{\Omega_2} |\nabla u|^2\, dx}{\int_{\Omega_2} u^2\, dx} = \lambda_i(\Omega_2)\end{aligned}$$

b) Das kleinste achsenparallele Rechteck, dass E enthält, ist gegeben durch $\Omega_2 = (-a, a) \times (-b, b)$. Für die Eigenwerte gilt:

$$\lambda_1(\Omega_2) = \frac{\pi^2}{4} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right).$$

Der Rand von E lässt sich parametrisieren durch: $\partial E = \{(a\cos\varphi, b\sin\varphi),\ \varphi \in [0, 2\pi]\}$. Die größten in E enthaltenen (achsenparallelen) Rechtecke sind somit gegeben durch $\Omega_1(\varphi) = (-a\cos\varphi, a\cos\varphi) \times (-b\sin\varphi, b\sin\varphi)$ für ein $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$, und es gilt:

$$\lambda_1(\Omega_1(\varphi)) = \frac{\pi^2}{4} \left(\frac{1}{a^2\cos^2\varphi} + \frac{1}{b^2\sin^2\varphi} \right).$$

$\lambda_1(\Omega_1(\varphi))$ wird minimal für $\frac{d}{d\varphi}\lambda_1(\Omega_1(\varphi)) = 0 \iff \varphi = \arctan\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)$. Einsetzen ergibt (hierbei ist $\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ und $\sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ hilfreich):

$$\lambda_1\left(\Omega_1\left(\arctan\left(\sqrt{\tfrac{a}{b}}\right)\right)\right) = \frac{\pi^2}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2.$$

Wir erhalten somit:

$$\lambda_1(E) \in \left[\frac{\pi^2}{4}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right), \frac{\pi^2}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2\right].$$

Aufgabe 41

a) Für $u \in H_0^1(\Omega)$, $c, \tilde{c} \in L^\infty(\Omega)$ gilt:

$$\frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 + cu^2\,dx}{\int_\Omega u^2\,dx} = \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 + \tilde{c}u^2\,dx + \int_\Omega (c-\tilde{c})u^2\,dx}{\int_\Omega u^2\,dx} \leq \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 + \tilde{c}u^2\,dx}{\int_\Omega u^2\,dx} + \|c-\tilde{c}\|_\infty$$

Mit dem Min-Max-Prinzip folgt:

$$\lambda_i(c) \leq \lambda_i(\tilde{c}) + \|c-\tilde{c}\|_\infty.$$

Vertauschen der Rollen von c und $\tilde{c}$ liefert analog

$$\lambda_i(\tilde{c}) \leq \lambda_i(c) + \|c-\tilde{c}\|_\infty,$$

und somit

$$|\lambda_i(c) - \lambda_i(\tilde{c})| \leq \|c-\tilde{c}\|_\infty.$$

b) Sei $w \in L^\infty(\Omega)$, $u \in H_0^1(\Omega)$. Dann gilt:

$$\int_\Omega wu^2\,dx = \int_\Omega \tilde{w}u^2\,dx + \int_\Omega w\left(1-\frac{\tilde{w}}{w}\right)u^2\,dx \geq \int_\Omega \tilde{w}u^2 - \left\|1-\frac{\tilde{w}}{w}\right\|_\infty \int_\Omega wu^2\,dx$$

und es folgt

$$\int_\Omega wu^2\,dx \geq \frac{1}{1+\left\|1-\frac{\tilde{w}}{w}\right\|_\infty}\int_\Omega \tilde{w}u^2\,dx.$$

Also:

$$\frac{\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx}{\int_\Omega wu^2\,dx} \leq \left(1+\left\|1-\frac{\tilde{w}}{w}\right\|_\infty\right)\frac{\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx}{\int_\Omega \tilde{\omega}u^2\,dx}$$

was mit dem Min-Max-Prinzip die Ungleichung

$$\lambda_i(w) \leq \left(1+\left\|1-\frac{\tilde{w}}{w}\right\|_\infty\right)\lambda_i(\tilde{w}) \iff \lambda_i(w) - \lambda_i(\tilde{w}) \leq \left\|1-\frac{\tilde{w}}{w}\right\|_\infty \lambda_i(\tilde{w})$$

impliziert.

Analog erhalten wir:

$$\int_\Omega wu^2\,dx = \int_\Omega \tilde{w}u^2\,dx + \int_\Omega w\left(1-\frac{\tilde{w}}{w}\right)u^2\,dx \leq \int_\Omega \tilde{w}u^2 + \left\|1-\frac{\tilde{w}}{w}\right\|_\infty \int_\Omega wu^2\,dx$$

und folglich (beachte: $\left\|1-\frac{\tilde{w}}{w}\right\|_\infty < 1$)

$$\int_\Omega wu^2\,dx \le \frac{1}{1-\left\|1-\frac{\tilde{w}}{w}\right\|_\infty}\int_\Omega \tilde{w}u^2\,dx.$$

Dies liefert

$$\frac{\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx}{\int_\Omega wu^2\,dx} \ge \left(1-\left\|1-\frac{\tilde{w}}{w}\right\|_\infty\right)\frac{\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx}{\int_\Omega \tilde{\omega}u^2\,dx}$$

und mit dem Min-Max-Prinzip folgt

$$\lambda_i(w) \ge \left(1-\left\|1-\frac{\tilde{w}}{w}\right\|_\infty\right)\lambda_i(\tilde{w}) \iff \lambda_i(\tilde{w})-\lambda_i(w) \le \left\|1-\frac{\tilde{w}}{w}\right\|_\infty \lambda_i(\tilde{w}).$$

Zusammen mit der ersten Ungleichung folgt die Behauptung.

Aufgabe 42

a) Wir definieren $D(B) := H_0^1((0,\pi)) \subset L^2((0,\pi);g)$. Die schwache Formulierung von $(*)$ ergibt sich durch Multplikation mit einer Testfunktion und partieller Integration. Mit $B : D(B)\times D(B) \to \mathbb{R}$ und $B(u,v) = \int_0^\pi u'(x)v'(x)\,dx$ ist die schwache Formulierung gegeben durch:

Finde $(\lambda, u) \in \mathbb{R}\times D(B)\backslash\{0\}$ mit:

$$B(u,v) = \lambda\langle u,v\rangle \qquad \text{für alle } v \in D(B).$$

b) Setzen wir $\tilde{u}(x) = \sin(x)$ als Testfunktion für das Rayleigh-Ritz-Verfahren, so erhalten wir als obere Schranke für den 1. Eigenwert von $(*)$:

$$\frac{B(\tilde{u},\tilde{u})}{\langle\tilde{u},\tilde{u}\rangle} = \frac{\int_0^\pi \sin^2 x\,dx}{\int_0^\pi (2+\sin x)\sin^2 x\,dx} = \frac{\frac{\pi}{2}}{\pi+\frac{4}{3}} = \frac{3\pi}{2(3\pi+4)} \le 0.351 =: \overline{\lambda}_1$$

c) Die schwache Formulierung von $(**)$ ist gegeben durch: Finde $(\lambda, u) \in \mathbb{R}\times D(B)\backslash\{0\}$ mit

$$B(u,v) = \mu\langle 3u, v\rangle_{L^2} \quad \text{für alle } v \in D(B).$$

Wegen $2+\sin x \le 3$ für alle $x\in\mathbb{R}$ folgt:

$$\frac{B(u,u)}{\langle u,u\rangle} = \frac{B(u,u)}{\int_0^\pi (2+\sin x)u^2\,dx} \ge \frac{B(u,u)}{\langle 3u,u\rangle_{L^2}}$$

und mit dem Min-Max-Prinzip:

$$\lambda_n = \min_{\substack{U\subseteq D(B)\\ \dim U=n}} \max_{u\in U\backslash\{0\}} \frac{B(u,u)}{\langle u,u\rangle} \ge \min_{\substack{U\subseteq D(B)\\ \dim U=n}} \max_{u\in U\backslash\{0\}} \frac{B(u,u)}{\langle 3u,u\rangle_{L^2}} = \mu_n$$

für alle $n\in\mathbb{N}$. Die Eigenwerte von $(**)$ sind also untere Schranken für die Eigenwerte von $(*)$. Die Eigenwerte von $(**)$ sind gegeben durch

$$\mu_k = \frac{k^2}{3} \quad (k\in\mathbb{N})$$

und für $\mu_2 = \frac{4}{3}$ gilt außerdem $\mu_2 > \overline{\lambda}_1$. Setze also $\rho := \mu_2 = \frac{4}{3}$.

d) Wir wenden das Temple-Lehmann-Verfahren mit der Testfunktion $\tilde{u}(x) = \sin x$ an. Eine a-priori untere Schranke für den 2. Eigenwert haben wir bereits gefunden, es bleibt noch die Bestimmung eines $w \in D(B)$ mit

$$B(w, v) = \langle \tilde{u}, v \rangle \quad \text{für alle } v \in D(B),$$

d.h.

$$\underbrace{\int_0^\pi w'v'\,dx}_{= -\int_0^\pi w''(x)v(x)\,dx} = \int_0^\pi (2 + \sin x)\sin(x)v(x)\,dx \quad \text{für alle } v \in D(B).$$

Wähle w als Lösung von

$$\begin{cases} -w''(x) &= (2 + \sin x)\sin x \quad x \in (0, \pi) \\ w(0) &= w(\pi) = 0 \end{cases}$$

Lösung des homog. Problems: $w_h(x) = ax + b$
spez. Lösung des inhom. Problems: $w_s(x) = \frac{1}{4}\sin^2 x + 2\sin x - \frac{1}{4}x^2$ (durch Integration)
Einsetzen der Randbedingungen in die allg. Lösung $w(x) = w_h(x) + w_s(x)$:

$$w(0) = 0 \iff b = 0, \qquad w(\pi) = 0 \iff a\pi - \tfrac{1}{4}\pi^2 = 0 \iff a = \tfrac{\pi}{4}.$$

Wir erhalten:

$$w(x) = \tfrac{\pi}{4}x + \tfrac{1}{4}\sin^2 x + 2\sin x - \tfrac{1}{4}x^2$$

Nach dem Temmple-Lehmann-Verfahren ist eine untere Schranke für den ersten Eigenwert von $(*)$ gegeben durch

$$\rho_1 = \rho - \frac{\rho}{1 - \mu}$$

wobei

$$\mu = \frac{B(\tilde{u}, \tilde{u}) - \rho\langle \tilde{u}, \tilde{u} \rangle}{B(\tilde{u}, \tilde{u}) - 2\rho\langle \tilde{u}, \tilde{u} \rangle + \rho^2 B(w, w)}$$

Dies ergibt:

$$\rho_1 = \frac{\rho\langle \tilde{u}, \tilde{u} \rangle - B(\tilde{u}, \tilde{u})}{\rho B(w, w) - \langle \tilde{u}, \tilde{u} \rangle}$$

Ausrechnen:

$$\langle \tilde{u}, \tilde{u} \rangle = \pi + \tfrac{4}{3}, \quad B(\tilde{u}, \tilde{u}) = \tfrac{\pi}{2}, \quad B(w, w) = \int_0^\pi (w'(x))^2\,dx = \frac{2\pi^3 + 207\pi + 512}{96}$$

Einsetzen in die Gleichung für ρ_1 ergibt:

$$\rho_1 = \frac{4(15\pi + 32)}{2\pi^3 + 135\pi + 146} \geq 0.3508.$$