Karlsruher Institut für Technologie (KIT) SS 2013
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
Dipl.-Math. Dagmar Roth

Rand- und Eigenwertprobleme
13. Übungsblatt

Aufgabe 43

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes C^1-Gebiet sowie

$$D(B) = \left\{ u \in H^1(\Omega) : \int_\Omega u \, dx = 0 \right\}, \quad B : D(B) \times D(B) \to \mathbb{R}, \; B[u,v] = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx.$$

Betrachte das Eigenwertproblem

$$B[u,v] = \lambda \langle u, v \rangle_{L^2} \quad \text{für alle } v \in D(B).$$

Wie lautet die starke Formulierung dieses Problems?
Setze weiter:

$$\begin{aligned} &X := D(B) \times L^2(\Omega) \\ &T : D(B) \to X, \; Tu := (u,u) \\ &b : X \times X \to \mathbb{R}, \quad b\left((\hat{u}_1, \hat{u}_2), (\hat{v}_1, \hat{v}_2)\right) := \int_\Omega \nabla \hat{u}_1 \cdot \nabla \hat{v}_1 \, dx + \gamma \int_\Omega (\hat{u}_2 \hat{v}_2 - \hat{u}_1 \hat{v}_1) \, dx \end{aligned}$$

mit $\gamma \in \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie: b ist mit einer geeigneten Wahl von $\gamma > 0$ positiv semidefinit und es gilt

$$B[u,v] = b(Tu, Tv) \quad (u, v \in D(B)).$$

b) Konstruieren Sie zu vorgegebenem $u \in D(B)$ Elemente $\hat{w} \in X$ mit

$$b(\hat{w}, Tv) = \langle u, v \rangle_{L^2} \quad (v \in D(B)).$$

Bitte wenden!

Aufgabe 44

Es sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum, $D(B) \subseteq H$ und $B : D(B) \times D(B) \to \mathbb{R}$ eine symmetrische positiv semidefinite Bilinearform. Weiter gelte, dass die Eigenelemente $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ des Eigenwertproblems $B[u,v] = \lambda\langle u,v\rangle$ (für alle $v \in D(B)$) eine ONB von H bilden und die Folge der Eigenwerte erfüllt $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots$ sowie $\lambda_i \to \infty$ $(i \to \infty)$.
Für gegebenes $u \in H$ betrachte das folgende Problem: Finde $w \in D(B)$ mit

$$(P) \quad B[w,v] = \langle u,v\rangle \quad \text{für alle } v \in D(B).$$

a) Zeigen Sie, dass $w \in D(B)$ genau dann eine Lösung von (P) ist, wenn

$$-B[w,w] = \min\{B[v,v] - 2\langle u,v\rangle : \; v \in D(B)\}$$

gilt und das Minimum für $v = w$ angenommen wird.

b) Es sei X ein reeller Vektorraum, $T : D(B) \to X$ ein linearer Operator und $b : X \times X \to \mathbb{R}$ eine symmetrische, positiv definite Bilinearform mit

$$B[\tilde{u},\tilde{v}] = b(T\tilde{u}, T\tilde{v}) \quad (\tilde{u},\tilde{v} \in D(B)).$$

Zeigen Sie, dass für eine Lösung $w \in D(B)$ von (P) gilt:

$$-B[w,w] = \max\{-b(g,g) : \; g \in V_u\}$$

wobei $V_u := \{g \in X : \; b(Tv,g) = \langle v,u\rangle \text{ für alle } v \in D(B)\}$.

Aufgabe 45: Einschließung des kleinsten Eigenwertes von $-\Delta$ auf dem Einheitskreis

Es sei $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 < 1\}$. Finden Sie mit Hilfe der Verfahren von Rayleigh-Ritz und Lehmann-Goerisch (für $N = 1$) eine Einschließung für den ersten Eigenwert des Problems

$$(*) \qquad -\Delta u = \lambda u \quad \text{in } \Omega, \qquad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

Hinweis: Bestimmen Sie zunächst mit Hilfe der Ansatzfunktionen $u_i(x,y) = (1 - x^2 - y^2)^i$, $i = 1,\ldots,6$ eine Näherungseigenfunktion $\tilde{u} \in H_0^1(\Omega)$ für den ersten Eigenwert. Um eine untere Schranke für den 2. Eigenwert zu finden, betrachten Sie Problem $(*)$ auf dem Quadrat $\Omega = (-1,1) \times (-1,1)$ und verwenden Sie Aufgabe 40.
Sie können für Ihre Berechnungen maple oder ein anderes geeignetes Mathematikprogramm verwenden. Rundungsfehler können vernachlässigt werden.

Besprechung in der Übung am 17.7.2013