Karlsruher Institut für Technologie (KIT) SS 2013
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
Dipl.-Math. Dagmar Roth

Rand- und Eigenwertprobleme
Lösungsvorschläge zum 13. Übungsblatt

Aufgabe 43

Die starke Formulierung des Problems ist gegeben durch

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda u \quad \text{in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \\ \int_\Omega u\,dx &= 0 \end{cases}$$

a) Wir beweisen zunächst den folgenden

Satz (Poincare-Ungleichung)
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes C^1-Gebiet und $\overline{u}_\Omega := \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u\,dx$. Weiter sei $1 \leq p \leq \infty$. Dann existiert eine Konstante $C = C(n,p,\Omega)$, so dass

$$\|u - \overline{u}_\Omega\|_{L^p} \leq C\|\nabla u\|_{L^p} \quad \text{für alle } u \in H^{1,p}(\Omega)$$

gilt.

Beweis: Beweis durch Widerspruch. Angenommen, die behauptete Aussage wäre falsch. Dann existiert eine Folge $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq H^{1,p}(\Omega)$ mit

$$(1) \quad \|u_k - \overline{u_k}_\Omega\|_p > k\|\nabla u_k\|_p.$$

Für die Folge $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$,

$$v_k := \frac{u_k - \overline{u_k}_\Omega}{\|u_k - \overline{u_k}_\Omega\|_p}$$

gilt dann

$$(2) \quad \overline{v_k}_\Omega = 0 \quad \text{und} \quad \|v_k\|_p = 1$$

und wegen (1):

$$(3) \quad \|\nabla v_k\|_p < \frac{1}{k} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Damit ist $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $H^{1,p}(\Omega)$ und besitzt somit eine Teilfolge $(v_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ mit $v_{k_j} \to v$ in $L^p(\Omega)$ (da die Einbettung $H^{1,p}(\Omega) \to L^p(\Omega)$ kompakt ist).
Aus (2) folgt: $v_\Omega = 0$ und $\|v\|_p = 1$. Andererseits gilt wegen (3) für alle $i = 1, \ldots, n$ und $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$:

$$\int_\Omega v\varphi_{x_i}\,dx = \lim_{k_j\to\infty}\int_\Omega v_{k_j}\varphi_{x_i}\,dx = -\lim_{k_j\to\infty}\int_\Omega v_{k_j,x_i}\varphi\,dx = 0,$$

d.h. $v \in H^{1,p}(\Omega)$ mit $\nabla v = 0$ f.ü. in Ω. Dies impliziert $v =$const. f.ü. und wegen $\int_\Omega v\,dx = 0$ folgt $v = 0$ f.ü. in Ω, also auch $\|v\|_p = 0$ ↯ zu $\|v\|_p = 1$.

Mit dem Satz folgt: Es ex. $C > 0$, so dass für alle $u \in D(B)$ gilt: $\|u\|_2 \leq C\|\nabla u\|_2$. Mit $\gamma = \frac{1}{C^2}$ folgt dann:

$$\begin{aligned} b\left((\hat{u}_1, \hat{u}_2), (\hat{u}_1, \hat{u}_2)\right) &= \int_\Omega |\nabla \hat{u}_1|^2\, dx + \frac{1}{C^2}\int_\Omega (\hat{u}_2)^2 - (\hat{u}_1)^2\, dx \\ &\geq \frac{1}{C^2}\int_\Omega (\hat{u}_1)^2\, dx + \frac{1}{C^2}\int_\Omega (\hat{u}_2)^2 - (\hat{u}_1)^2\, dx = \frac{1}{C^2}\int_\Omega (\hat{u}_2)^2\, dx \geq 0 \end{aligned}$$

Also ist b positiv semidefinit. Weiter gilt:

$$b(Tu, Tv) = b\left((u,u),(v,v)\right) = \underbrace{\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx}_{B[u,v]} + \gamma \int_\Omega uv - uv\, dx.$$

b) Sei $\hat{w} = (\hat{w}_1, \hat{w}_2) \in X$. Es gilt:

$$\begin{aligned} & b(\hat{w}, Tv) = \langle u, v\rangle_{L^2} \quad \text{für alle } v \in D(B) \\ \iff\ & b((\hat{w}_1, \hat{w}_2), (v,v)) = \langle u, v\rangle_{L^2} \quad \text{für alle } v \in D(B) \\ \iff\ & \int_\Omega \nabla \hat{w}_1 \cdot \nabla v\, dx + \gamma \int_\Omega \hat{w}_2 v - \hat{w}_1 v\, dx = \int_\Omega uv\, dx \quad \text{für alle } v \in D(B) \\ \overset{\hat{w}_1 \overset{!}{\in} H^2(\Omega)}{\iff}\ & \int_\Omega -(\Delta \hat{w}_1) v\, dx + \int_{\partial\Omega} \underbrace{\nabla \hat{w}_1 \cdot \nu}_{= \frac{\partial \hat{w}_1}{\partial \nu} \overset{!}{=} 0}\, d\sigma + \gamma \int_\Omega \hat{w}_2 v - \hat{w}_1 v\, dx = \int_\Omega uv\, dx \quad \text{für alle } v \in D(B) \\ \iff\ & \int_\Omega \left(\hat{w}_2 - \hat{w}_1 - \frac{1}{\gamma}(\Delta \hat{w}_1 + u)\right) v\, dx = 0 \end{aligned}$$

Wähle also

$$\begin{pmatrix} \hat{w}_1 \\ \hat{w}_2 \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} f \\ f + \frac{1}{\gamma}(\Delta f + u) \end{pmatrix} :\ f \in H^2(\Omega) \cap D(B),\ \frac{\partial f}{\partial \nu} = 0 \text{ auf } \partial\Omega \right\}$$

Aufgabe 44

a) Zeige:

$w \in D(B)$ Lösung von (P) $B[w,v] = \langle u, v\rangle$ für alle $v \in D(B)$ $\iff$ $-B[w,w] = \min\{B[v,v] - 2\langle u, v\rangle :\ v \in D(B)\}$ und das Minimum wird für $v = w$ angenommen.

"$\Rightarrow$" Da B positiv semidefinit, gilt für alle $v \in D(B)$:

$$\begin{aligned} & B[v-w, v-w] \geq 0 \\ \iff\ & B[v,v] - 2B[w,v] + B[w,w] \geq 0 \\ \overset{w \text{ löst } (P)}{\iff}\ & B[v,v] - 2\langle u, v\rangle + B[w,w] \geq 0 \end{aligned}$$

Es folgt: $B[v,v] - 2\langle u,v\rangle \geq -B[w,w]$ für alle $v \in D(B)$ und somit

$$-B[w,w] \leq \min\{B[v,v] - 2\langle u, v\rangle :\ v \in D(B)\}.$$

Da w eine Lösung von (P) ist, gilt: $B[w,w] - 2\langle u, w\rangle = -B[w,w]$. Es folgt

$$-B[w,w] = \min\{B[v,v] - 2\langle u, v\rangle :\ v \in D(B)\}$$

und das Mimimum wird für $v = w$ angenommen.

"$\Leftarrow$" Gilt

$$-B[w,w] = \min\{B[v,v] - 2\langle u,v\rangle : \ v \in D(B)\}$$

und das Minimum wird für $v = w$ angenommen, so folgt für alle $v \in D(B)$:

$$\begin{aligned} & \tfrac{d}{ds}\left(B[w+sv, w+sv] - 2\langle u, w+sv\rangle\right)|_{s=0} = 0 \\ \Longleftrightarrow\ & \tfrac{d}{ds}\left(B[w,w] + 2sB[w,v] + s^2B[v,v] - 2\langle u,w\rangle - 2s\langle u,v\rangle\right)|_{s=0} = 0 \\ \Longleftrightarrow\ & B[w,v] - \langle u,v\rangle = 0, \end{aligned}$$

d.h. w ist eine Lösung von (P).

b) Sei $g \in V_u = \{g \in X : \ b(Tv, g) = \langle v,u\rangle$ für alle $v \in D(B)\}$ und $w \in D(B)$ eine Lösung von (P). Dann gilt wegen der positiven Definitheit von b:

$$0 \le b(Tw-g, Tw-g) = \underbrace{b(Tw,Tw)}_{=B[w,w]} - 2\underbrace{b(Tw,g)}_{=\langle w,u\rangle = B[w,w]} + b(g,g) = -B[w,w] + b(g,g)$$

Es folgt:

$$-B[w,w] \ge \max\{-b(g,g) : \ g \in V_u\}.$$

Betrachte $g = Tw \in X$. Es gilt:

$$b(Tv, Tw) = B[v,w] = B[w,v] = \langle u,v\rangle = \langle v,u\rangle,$$

d.h. $g = Tw \in V_u$. Außerdem gilt wegen den Voraussetzungen an b:

$$-b(g,g) = -b(Tw,Tw) = -B[w,w]$$

also $-B[w,w] = \max\{-b(g,g), \ g \in V_u\}$.

Motivation: Betrachte das Eigenwertproblem

$$u \in D(B) : \quad B[u,v] = \lambda\langle u,v\rangle \quad \text{für alle } v \in D(B).$$

Wir führen das Temple-Lehmann-Verfahren für den ersten Eigenwert durch: Sei $\tilde{u} \in D(B)$, $\rho \in \mathbb{R}$ mit $\Lambda_1 < \rho \le \lambda_2$ ($\Lambda_1 = \frac{B[\tilde{u},\tilde{u}]}{\langle\tilde{u},\tilde{u}\rangle}$) und $w \in D(B)$ mit $(*)\quad B(w,v) = \langle\tilde{u},v\rangle$ für alle $v \in D(B)$.

Eine untere Schranke für den ersten Eigenwert ist gegeben durch

$$\rho_1 := \frac{\rho\langle\tilde{u},\tilde{u}\rangle - B[\tilde{u},\tilde{u}]}{\rho B[w,w] - \langle\tilde{u},\tilde{u}\rangle} = \frac{B[\tilde{u},\tilde{u}] - \rho\langle\tilde{u},\tilde{u}\rangle}{\langle\tilde{u},\tilde{u}\rangle - \rho B[w,w]}$$

Problem: Finde $w \in D(B)$, das $(*)$ erfüllt. Falls kein solches w gefunden werden kann (im Sinne von explizit bekannt sein), kann man versuchen, eine untere Schranke $-C$ für $-B[w,w]$ zu finden. Dann:

$$\rho_1 = \frac{B[\tilde{u},\tilde{u}] - \rho\langle\tilde{u},\tilde{u}\rangle}{\langle\tilde{u},\tilde{u}\rangle - \rho B[w,w]} \ge \frac{B[\tilde{u},\tilde{u}] - \rho\langle\tilde{u},\tilde{u}\rangle}{\langle\tilde{u},\tilde{u}\rangle - \rho\, C} =: \tilde{\rho}_1.$$

(Beachte: $B[\tilde{u},\tilde{u}] - \rho\langle\tilde{u},\tilde{u}\rangle < 0$ da $\Lambda_1 < \rho$ und $\langle\tilde{u},\tilde{u}\rangle - \rho\, C \le \langle\tilde{u},\tilde{u}\rangle - \rho B[w,w] \le 0$ da $B[\tilde{u} - \rho w, \tilde{u} - \rho w] \ge 0$.)

Eine untere Schranke für den ersten Eigenwert ist dann gegeben durch ρ_1. Die Charakterisierung in a) liefert jedoch keine brauchbaren Informationen, denn um eine untere Schranke für

$-B[w,w]$ zu bestimmen, muss man eine untere Schranke für das Min. auf der rechten Seite berechnen.
In b) haben wir gezeigt, dass jeder Ausdruck der Form $-b(g,g)$ für $g \in V_u$ eine untere Schranke für $-B[w,w]$ darstellt. Wir müssen also nur Funktionen in V_u finden, um eine untere Schranke für den ersten Eigenwert zu berechnen. Dies ist viel einfacher als die Lösung von $(*)$, z.B. ist in Aufgabe 43 V_u gegeben durch die am Ende angegebene Menge.

Aufgabe 45

Wir betrachten das Problem in der schwachen Formulierung und bauen noch einen spektralen Shift $\gamma = 1$ ein:

$$(*) \quad u \in H_0^1(\Omega)\backslash\{0\} : \quad \underbrace{\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + uv\, dx}_{=:B[u,v]} = \underbrace{(\lambda+1)}_{=:\kappa} \underbrace{\int_\Omega uv\, dx}_{=:\langle u,v\rangle} \quad \text{für alle } v \in H_0^1(\Omega)$$

Das Verfahren von Rayleigh-Ritz kann auch zur Berechnung von Näherungseigenfunktionen verwendet werden: Für $u_1, \dots, u_m \in H_0^1(\Omega)$ definiere die Matrizen

$$\tilde{A}_1 = (B[u_i, u_j])_{i,j=1,\dots,m}\,, \quad \tilde{A}_2 = (\langle u_i, u_j\rangle)_{i,j=1\dots,m}$$

und berechne Näherungseigenpaare $(K_i, x^{(i)}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ des Matrix-Eigenwertrpoblems $\tilde{A}_1 x = K\tilde{A}_2 x$. Dann ist $\tilde{v}_i = \sum_{j=1}^m x_j^{(i)} v_j$ eine Näherungseigenfunktion zum Eigenwert κ_i.
In der Aufgabe haben wir $m = 6$. Wir berechnen mit Hilfe des eben Beschriebenen zunächst eine genäherte Eigenfunktion $\tilde{u}$ für den ersten Eigenwert. Diese nutzen wir als Testfunktion für das Verfahren von Rayleigh-Ritz und Lehmann-Goerisch.
Rayleigh-Ritz: Eine obere Schranke (und gleichzeitig Näherung) für den ersten Eigenwert ist gegeben durch

$$\Lambda_1 = \frac{B[\tilde{u}, \tilde{u}]}{\langle \tilde{u}, \tilde{u}\rangle}.$$

Für Lehmann-Goerisch setze:

$$\begin{aligned} X &:= \left(L^2(\Omega)\right)^3 \\ b(\hat{v}, \hat{w}) &:= \langle \hat{v}_1, \hat{w}_1\rangle + \langle \hat{v}_2, \hat{w}_2\rangle + \langle \hat{v}_3, \hat{w}_3\rangle \quad (\hat{v}, \hat{w} \in X) \\ T(u) &:= \begin{pmatrix} \nabla u \\ u \end{pmatrix} \quad (u \in H_0^1(\Omega)) \end{aligned}$$

Dann gilt offenbar: $b(Tu, Tv) = B(u,v)$ für alle $u, v \in H_0^1(\Omega)$.
Noch benötigt:

(i) untere Schranke für den 2. Eigenwert: Da $(-1,1)^2 \supset \Omega$, gilt mit Aufgabe 40 a): Der 2. Eigenwert von

$$u \in H_0^1((-1,1)^2)\backslash\{0\} : \quad \int_{(-1,1)^2} \nabla u \cdot \nabla v + uv\, dx = \mu \int_{(-1,1)^2} uv\, dx \quad \text{für alle } v \in H_0^1((-1,1)^2)$$

ist eine untere Schranke für κ_2. Es gilt $\mu_2 = \frac{4\pi^2}{4} + \frac{\pi^2}{4} + 1 = \frac{5\pi^2}{4} + 1 =: \rho$.

Es muss noch geprüft werden, ob $\Lambda_1 < \rho$ gilt.

(ii) Konstruiere $\hat{w} \in H_0^1(\Omega)$ mit $b(\hat{w}, Tv) = \langle \tilde{u}, v \rangle$ für alle $v \in H_0^1(\Omega)$, d.h.

$$\int_\Omega \begin{pmatrix} \hat{w}_1 \\ \hat{w}_2 \end{pmatrix} \cdot \nabla v + w_3 v \, dx = \int_\Omega \tilde{u} v \, dx \overset{\begin{pmatrix} \hat{w}_1 \\ \hat{w}_2 \end{pmatrix} \in H(\mathrm{div}, \Omega)}{\iff} \int_\Omega \left(-\operatorname{div} \left(\begin{pmatrix} \hat{w}_1 \\ \hat{w}_2 \end{pmatrix} \right) + \hat{w}_3 - \tilde{u} \right) v \, dx = 0$$

Wähle also

$$\hat{w}_3 = \operatorname{div} \left(\begin{pmatrix} \hat{w}_1 \\ \hat{w}_2 \end{pmatrix} \right) + \tilde{u}.$$

Aus der Vorlesung wissen wir, dass gute untere Schranken nur dann zu erwarten sind, wenn

$$\begin{pmatrix} \hat{w}_1 \\ \hat{w}_2 \end{pmatrix} \approx \frac{1}{\tilde{\lambda}_1} \nabla \tilde{u}$$

gewählt wird ($\tilde{\lambda}_1 = \Lambda_1$). Da die Näherung $\tilde{u}$ glatt ist, können wir

$$\begin{pmatrix} \hat{w}_1 \\ \hat{w}_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\tilde{\lambda}_1} \nabla \tilde{u}$$

setzen. Damit ergibt sich:

$$\hat{w}_3 = \frac{1}{\tilde{\lambda}_1} \Delta \tilde{u} + \tilde{u}.$$

Mit Lehmann-Goerisch folgt nun: Eine untere Schranke für den ersten Eigenwert ist gegeben durch

$$\rho_1 := \rho - \frac{\rho}{1 - \hat{\mu}} \quad \text{wobei} \quad \hat{\mu} = \frac{B[\tilde{u}, \tilde{u}] - \rho \langle \tilde{u}, \tilde{u} \rangle}{B[\tilde{u}, \tilde{u}] - 2\rho \langle \tilde{u}, \tilde{u} \rangle + \rho^2 b(\hat{w}, \hat{w})}.$$

Alle Rechnungen und Ergebnisse finden sich im maple-worksheet. Beachte, dass in maple ohne Berücksichtigung von Rundungsfehlern gerechnet wird, d.h. die Ergebnisse sind nicht verifiziert.