Karlsruher Institut für Technologie (KIT) SS 2013
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
Dipl.-Math. Dagmar Roth

Rand- und Eigenwertprobleme
14. Übungsblatt

Aufgabe 46

Sei $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x, y \geq 0, \ x + y \leq 1\}$. Konstruieren Sie eine Homotopie zur Berechnung unterer Schranken für die Eigenwerte des Problems

$$-\Delta u = \lambda u \quad \text{in } \Omega, \qquad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega$$

Hinweis: Aufgabe 40 a) mit $\Omega_1 = \Omega$ und $\Omega_2 = (0,1)^2$.

Wie lässt sich dies auf allgemeinere Gebiete $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ übertragen?

Aufgabe 47

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Quader und $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,d} : \Omega \to \mathbb{R}^{d \times d}$ symmetrisch und gleichmäßig positiv definit mit $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$.
Geben Sie die schwache Formulierung des Eigenwertproblems

$$-\operatorname{div}(A \nabla u) = \lambda u \quad \text{in } \Omega, \qquad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega$$

an und wählen Sie geeignete X, b, T für das Verfahren von Lehmann-Goerisch. Bestimmen Sie außerdem zu gegebenem $\tilde{u} \in D(B)$ eine Funktion $\hat{w} \in X$ mit $b(\hat{w}, Tv) = \langle \tilde{u}, v \rangle$ für alle $v \in D(B)$. Konstruieren Sie ferner eine Homotopie zur Berechnung unterer Eigenwertschranken.

Wie müssen Sie vorgehen, wenn das Gebiet Ω ein beliebiges beschränktes Liptschitz-Gebiet ist?