Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
Dipl.-Math. Dagmar Roth

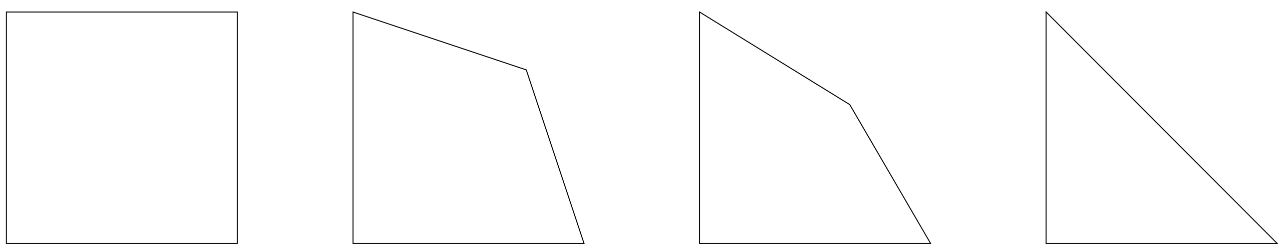
SS 2013

Rand- und Eigenwertprobleme
Lösungsvorschläge zum 13. Übungsblatt

Aufgabe 46

Definiere

$$\begin{aligned}
\Omega_0 &:= \operatorname{conv}\{(0,0),(1,0),(0,1),(1,1)\} = (-1,1)^2 \\
\Omega_s &:= \operatorname{conv}\left\{(0,0),(1,0),(0,1),\left(1-\tfrac{s}{2},1-\tfrac{s}{2}\right)\right\} \qquad (0 < s < 1) \\
\Omega_1 &:= \operatorname{conv}\{(0,0),(1,0),(0,1)\} = \Omega
\end{aligned}$$



Für $s \in [0,1]$ setze nun:

$$\begin{aligned}
H_s &:= \left\{u \in L^2(\Omega_0):\ u = 0 \text{ auf } \Omega_0 \backslash \Omega_s\right\} \\
\langle \cdot,\cdot\rangle_s &:= \langle \cdot,\cdot\rangle_{L^2(\Omega_s)} \\
D(B_s) &:= \left\{u \in H_0^1(\Omega_0):\ u = 0 \text{ auf } \Omega_0 \backslash \Omega_s\right\} \\
B_s[u,v] &:= \int_{\Omega_0} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega_s} \nabla u \cdot \nabla v \, dx \quad (u,v \in D(B_s))
\end{aligned}$$

Betrachte für $s \in [0,1]$ die Familie der Eigenwertprobleme:

$$u \in D(B_s): \quad B_s[u,v] = \lambda^{(s)} \langle u,v\rangle_s \quad \text{für alle } v \in D(B_s).$$

Für $0 \le s \le t \le 1$ gilt dann: $H_s \supseteq H_t$, $D(B_s) \supseteq D(B_t)$ sowie

$$\frac{B_s[u,u]}{\langle u,u\rangle_s} = \frac{\int_{\Omega_0} \nabla u \cdot \nabla v \, dx}{\int_{\Omega_0} u^2 \, dx} = \frac{B_t[u,u]}{\langle u,u\rangle_t} \quad \text{für alle } u \in D(B_t)\backslash\{0\}.$$

Mit dem Min-Max-Prinzip folgt

$$\lambda_n^{(s)} \le \lambda_n^{(t)} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Für ein beliebiges Gebiet Ω (beschränkt) wähle z.B. ein Rechteck $\Omega_0 \supseteq \Omega$ und Ω_s mit $\Omega_0 \supseteq \Omega_s \supseteq \Omega_t \supseteq \Omega$ für $0 \le s \le t \le 1$. Um eine sinnvolle Homotopie zu erhalten, sollte die Deformation möglichst stetig erfolgen. Dies kann je nach Gebiet Ω sehr aufwändig und technisch sein (insbesondere in der Implementation auf dem PC).

Aufgabe 47

Die schwache Formulierung des Eigenwertproblems lautet:

$$u \in H_0^1(\Omega): \quad \int_\Omega (\nabla u)^T A \nabla v \, dx = \lambda \int_\Omega uv \, dx \qquad \text{für alle } v \in H_0^1(\Omega).$$

Definiere also $D(B) := H_0^1(\Omega)$ und mit einem spektralen Shift $\gamma > 0$:

$$\begin{aligned} B[u,v] &:= \int_\Omega (\nabla u)^T A \nabla v \, dx + \gamma \int_\Omega uv \, dx \\ \langle u, v \rangle &:= \int_\Omega uv \, dx \qquad (u, v \in D(B)) \end{aligned}$$

Wähle

$$\begin{aligned} X &:= \left(L^2(\Omega)\right)^{d+1} \\ b(\hat{u}, \hat{v}) &:= \int_\Omega \begin{pmatrix} \hat{u}_1 & \dots & \hat{u}_d \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} \hat{v}_1 \\ \vdots \\ \hat{v}_d \end{pmatrix} + \gamma \, \hat{u}_{d+1} \hat{v}_{d+1} \, dx \quad (\hat{u}, \hat{v} \in X) \\ Tu &= \begin{pmatrix} \nabla u \\ u \end{pmatrix} \qquad (u \in H_0^1(\Omega)) \end{aligned}$$

(mit $\gamma > 0$). Dann gilt:

$$b(Tu, Tv) = B[u,v] \qquad \text{für alle } u, v \in D(B)$$

Sei nun $\tilde{u} \in D(B)$ gegeben. Finde $\hat{w} \in X$ mit

$$b(\hat{w}, Tv) = \langle \tilde{u}, v \rangle \quad \text{für alle } v \in D(B),$$

d.h. es muss gelten (schreibe $\hat{w} = (\sigma, \hat{w}_{d+1})$ mit $\sigma = \left(\hat{w}_1, \dots, \hat{w}_d\right)$):

$$\begin{aligned} & \int_\Omega \sigma^T A \nabla v \, dx + \gamma \int_\Omega \hat{w}_{d+1} v \, dx = \int_\Omega \tilde{u} v \, dx \\ \overset{A\sigma \in H(\operatorname{div},\Omega)}{\Longleftrightarrow} & \int_\Omega (-\operatorname{div}(A\sigma) + \gamma \hat{w}_{d+1}) v \, dx = \int_\Omega \tilde{u} v \, dx \quad \text{für alle } v \in D(B) \end{aligned}$$

Wähle also

$$\hat{w}_{d+1} = \frac{1}{\gamma} \left(\tilde{u} + \operatorname{div}(A\sigma)\right).$$

Dabei muss σ noch geeignet gewählt werden. In der Vorlesung haben wir gesehen, dass gute Schranken nur zu erwarten sind, wenn

$$\hat{w} \approx \frac{1}{\tilde{\lambda} + \gamma} T\tilde{u}$$

gilt ($(\tilde{\lambda}, \tilde{u}) \in \mathbb{R} \times D(B)$ ein Näherungseigenpaar). Es sollte also

$$\sigma \approx \frac{1}{\tilde{\lambda} + \gamma} \nabla \tilde{u}$$

gewählt werden unter der Nebenbedingung $A\sigma \in H(\operatorname{div}, \Omega)$, d.h. $\sigma \in \{A^{-1}\rho : \ \rho \in H(\operatorname{div}, \Omega)\}$.

Um eine Homotopie zu konstruieren, bemerken wir zunächst, dass ein $a_0 > 0$ existiert mit:

$$\int_\Omega (\nabla u)^T A \nabla u \, dx \geq a_0 \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \quad \text{für alle } u \in D(B)$$

Wähle also für $0 \leq s \leq 1$:

$$\begin{aligned} D(B_s) &:= D(B) = H_0^1(\Omega) \\ A_s &:= sA + (1-s)a_0 I \\ B_s[u,v] &:= \int_\Omega (\nabla u)^T A_s \nabla v \, dx + \gamma \int_\Omega uv \, dx \\ \langle u, v \rangle_s &:= \langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

betrachte für $s \in [0,1]$ die Familie der Eigenwertprobleme:

$$u \in D(B_s): \quad B_s[u,v] = (\lambda^{(s)} + \gamma)\langle u, v \rangle_s \qquad \text{für alle } v \in D(B_s).$$

Für alle $0 \leq s \leq t \leq 1$ und $z \in \mathbb{R}^d$ gilt:

$$z^T(A_t - A_s)z = (t-s)z^T(A - a_0 I)z \geq 0,$$

und somit

$$\frac{B_s[u,u]}{\langle u, u \rangle_s} \leq \frac{B_t[u,u]}{\langle u, u \rangle_t} \quad \text{für alle } u \in D(B_t) \setminus \{0\}.$$

Mit dem Min-Max-Prinzip folgt:

$$\lambda_n^{(s)} \leq \lambda_n^{(t)} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Beachte: Für $s = 0$ erhalten wir das Problem

$$(*) \qquad u \in H_0^1(\Omega): \quad a_0 \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \gamma uv \, dx = \underbrace{(\lambda^{(0)} + \gamma)}_{=:\mu^{(0)}} \int_\Omega uv \, dx$$

Da Ω ein Quader ist, sind die Eigenwerte dieses Problems bekannt.
Ist Ω ein beliebiges Gebiet, so müssen wir die bereits konstruierte Homotopie noch mit einer Gebietshomotopie wie in der vorherigen Aufgabe kombinieren. Wir berechnen also zuerst untere Schranken für das Problem $(*)$ (wähle $\Omega_0 \supseteq \Omega$ und eine Homotopie wie in Aufgabe 46) und führen anschließend die Homotopie für die Koeffizientenmatrix wie eben beschrieben aus.