Karlsruher Institut für Technologie (KIT) SS 2013
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
Dipl.-Math. Dagmar Roth

Rand- und Eigenwertprobleme
Lösungsvorschläge zum 1. Übungsblatt

Aufgabe 1

Die zugehörige charakteristische Gleichung ist

$$q^2 - q + \lambda = 0.$$

Setze

$$q_1 = \tfrac{1}{2} + \sqrt{\tfrac{1}{4} - \lambda}, \qquad q_2 = \tfrac{1}{2} - \sqrt{\tfrac{1}{4} - \lambda}.$$

Dann ist die allgemeine Lösung von $-v''(x) + v'(x) = \lambda v(x)$ gegeben durch

$$v(x) = \begin{cases} c_1 e^{q_1 x} + c_2 e^{q_2 x}, & q_1 \neq q_2 \\ c_1 e^{q_1 x} + c_2 x e^{q_1 x}, & q_1 = q_2 \end{cases}$$

(mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ beliebig).
Fall 1: $q_1 = q_2 = \frac{1}{2}$. Es gilt: $\lambda = \frac{1}{4}$, $v(x) = (c_1 + c_2 x)e^{q_1 x}$, $v'(x) = \left(q_1(c_1 + c_2 x) + c_2\right) e^{q_1 x}$.
Einsetzen der Randbedingungen:

$$v(0) = v(\pi) \iff c_1 = (c_1 + \pi c_2)e^{q_1 \pi} \tag{1}$$
$$v'(0) = v'(\pi) \iff q_1 c_1 + c_2 = \left(q_1(c_1 + \pi c_2) + c_2\right) e^{q_1 \pi} \tag{2}$$

(1) in (2) einsetzen ergibt

$$q_1 c_1 + c_2 = q_1 c_1 + c_2 e^{q_1 \pi} \Longrightarrow c_2 = c_2 e^{q_1 \pi} \overset{q_1 = 1/2}{\Longrightarrow} c_2 = 0 \overset{(1)}{\Longrightarrow} c_1 = 0,$$

also besitzt das gegebene Problem in diesem Fall nur die triviale Lösung und $\lambda = \frac{1}{4}$ ist kein Eigenwert des Problems.
Fall 2: $q_1 \neq q_2$. Nun gilt $v(x) = c_1 e^{q_1 x} + c_2 e^{q_2 x}$, $v'(x) = c_1 q_1 e^{q_1 x} + c_2 q_2 e^{q_2 x}$. Die Randbedingungen führen auf die Gleichungen

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= c_1 e^{q_1 \pi} + c_2 e^{q_2 \pi} \\ c_1 q_1 + c_2 q_2 &= c_1 q_1 e^{q_1 \pi} + c_2 q_2 e^{q_2 \pi} \end{aligned} \iff \underbrace{\begin{pmatrix} 1 - e^{q_1 \pi} & 1 - e^{q_2 \pi} \\ q_1(1 - e^{q_1 \pi}) & q_2(1 - e^{q_2 \pi}) \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Das System besitzt genau dann eine nichttriviale Lösung, wenn $\det A = 0$ gilt. Wegen

$$\det A = (q_2 - q_1)\left(1 - e^{q_1 \pi}\right)\left(1 - e^{q_2 \pi}\right)$$

und $q_1 \neq q_2$ ist dies genau dann der Fall, wenn gilt

$$\begin{aligned} & 1 - e^{q_1 \pi} = 0 \quad \text{oder} \quad 1 - e^{q_2 \pi} = 0 \\ \iff & q_1 = 2ik_1 \quad \text{oder} \quad q_2 = 2ik_2 \qquad \text{mit } k_1, k_2 \in \mathbb{Z} \\ \iff & \tfrac{1}{2} + \sqrt{\tfrac{1}{4} - \lambda} = 2ik_1 \quad \text{oder} \quad \tfrac{1}{2} - \sqrt{\tfrac{1}{4} - \lambda} = 2ik_2 \\ \Longrightarrow & \tfrac{1}{4} - \lambda = \left(2ik_1 - \tfrac{1}{2}\right)^2 \quad \text{oder} \quad \tfrac{1}{4} - \lambda = \left(\tfrac{1}{2} - 2ik_2\right)^2 \\ \Longrightarrow & \lambda = \tfrac{1}{4} - \left(2ik - \tfrac{1}{2}\right)^2 = 4k^2 + 2ik \quad \text{mit } k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Das geg. Problem besitzt somit die Eigenwerte $\lambda^{(k)} = 4k^2 + 2ik$.
Bestimmung der Eigenfunktion zu $\lambda^{(k)}$: allg. Lösung ist (beachte $q_1 + q_2 = 1$, also $q_2 = 1 - q_1$):

$$v_k(x) = c_1 e^{2ikx} + c_2 e^x e^{2ikx}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Wegen $v_k(0) = v_k(\pi)$ folgt $c_2 = 0$ und $c_1 \in \mathbb{R}$ beliebig.

Aufgabe 2

Wir betrachten zunächst die homogene Gleichung

$$u'' + \gamma u' + \omega^2 u = 0.$$

charakteristische Gleichung: $\lambda^2 + \gamma\lambda + \omega^2 = 0$. Lösungen: $\lambda_{1,2} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega^2}$.
<u>Fall 1:</u> $\gamma^2 > 4\omega^2$; Lösungen sind $u_{1,2}(t) = \exp\left[\left(-\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega^2}\right) t\right]$
<u>Fall 2:</u> $\gamma^2 = 4\omega^2$; Lösungen sind $u_1(t) = \exp\left[-\frac{\gamma}{2}t\right]$, $u_2(t) = t\exp\left[-\frac{\gamma}{2}t\right]$
<u>Fall 3:</u> $\gamma^2 < 4\omega^2$; Lösungen sind

$$u_1(t) = \exp\left[-\tfrac{\gamma}{2}t\right] \sin\left(\sqrt{\omega^2 - \tfrac{\gamma^2}{4}}t\right), \; u_2(t) = \exp\left[-\tfrac{\gamma}{2}t\right] \cos\left(\sqrt{\omega^2 - \tfrac{\gamma^2}{4}}t\right)$$

Wir bestimmen nun eine spezielle Lösung des inhomogenen Problems $u'' + \gamma u' + \omega^2 u = \sin(\tilde{\omega}t)$.
<u>Fall $\gamma \neq 0$</u>
Falls $\tilde{\omega} = 0$, so ist das Problem homogen (Lösung s.o.). Betrachte also den Fall $\tilde{\omega} \neq 0$ und verwende den Ansatz $u_s(t) = a\sin(\tilde{\omega}t) + b\cos(\tilde{\omega}t)$ $(a, b \in \mathbb{R})$. Einsetzen in die Dgl. ergibt

$$u_s'' + \gamma u_s' + \omega^2 u_s = \left[a(\omega^2 - \tilde{\omega}^2) - b\gamma\tilde{\omega}\right] \sin(\tilde{\omega}t) + \left[b(\omega^2 - \tilde{\omega}^2) - a\gamma\tilde{\omega}\right] \cos(\tilde{\omega}t) \stackrel{!}{=} \sin(\tilde{\omega}t)$$
$$\iff \left\{ \begin{array}{l} a(\omega^2 - \tilde{\omega}^2) - b\gamma\tilde{\omega} = 1 \\ b(\omega^2 - \tilde{\omega}^2) - a\gamma\tilde{\omega} = 0 \end{array} \right\} \iff \begin{pmatrix} \omega^2 - \tilde{\omega}^2 & -\gamma\tilde{\omega} \\ \gamma\tilde{\omega} & \omega^2 - \tilde{\omega}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wähle also

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{(\omega^2 - \tilde{\omega}^2)^2 + \gamma^2\tilde{\omega}^2} \begin{pmatrix} \omega^2 - \tilde{\omega}^2 \\ -\gamma\tilde{\omega} \end{pmatrix}.$$

Die allg. Lösung der Differentialgleichung ist somit gegeben durch

$$u(t) = \alpha_1 u_1(t) + \alpha_2 u_2(t) + a\sin(\tilde{\omega}t) + b\cos(\tilde{\omega}t), \qquad (\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}).$$

<u>Fall $\gamma = 0$</u>
Für $\tilde{\omega} = 0$ erhalten wir wieder das homogene Problem. Im Fall $\tilde{\omega} \neq \omega$ verwende den Ansatz $u_s(t) = a\sin(\tilde{\omega}t) + b\cos(\tilde{\omega}t)$. Einsetzen:

$$u_s'' + \omega^2 u_s = a(\omega^2 - \tilde{\omega}^2)\sin(\tilde{\omega}t) + b(\omega^2 - \tilde{\omega}^2)\cos(\tilde{\omega}t) \stackrel{!}{=} \sin(\tilde{\omega}t).$$

Lösung ist $a = \frac{1}{\omega^2 - \tilde{\omega}^2}$, $b = 0$, also $u_s(t) = \frac{1}{\omega^2 - \tilde{\omega}^2}\sin(\tilde{\omega}t)$.
Im Fall $\omega = \tilde{\omega}$ müssen wir einen anderen Ansatz verwenden: $u_s(t) = at\cos(\tilde{\omega}t)$. Einsetzen ergibt

$$u_s'' + \tilde{\omega}^2 u_s = -2a\tilde{\omega}\sin(\tilde{\omega}t) \stackrel{!}{=} \sin(\tilde{\omega}t)$$

Wähle also $a = -\frac{1}{2\tilde{\omega}}$, folglich $u_s(t) = -\frac{t}{2\tilde{\omega}}\cos(\tilde{\omega}t)$.
Diskussion: Federpendel mit Masse m. $u(t)$ beschreibt Auslenkung aus der Ruheposition. In Ruhe heben sich Gravitationskraft und Rückstellkraft der Feder auf. Außerhalb der Ruheposition wirken folgende Kräfte:

(i) Rückstellkraft der Feder: $F_1(t) = -Du(t)$, $D > 0$ konstant (Hook'sches Gesetz)

(ii) Reibungskraft $F_2(t) = -Ku'(t)$, $K > 0$ konstant

(iii) externe Kraft: $F_3(t)$, in diesem Fall $F_3(t) = \sin(\tilde{\omega}t)$

Newton: $F = ma$, also $F_1 + F_2 + F_3 = -Du(t) - Ku'(t) + \sin(\tilde{\omega}t) = mu''(t)$, d.h.

$$u''(t) + \underbrace{\frac{K}{m}}_{=\gamma} u'(t) + \underbrace{\frac{D}{m}}_{=\omega^2} u(t) = \sin(\tilde{\omega}t).$$

<u>Fall $\gamma = 0$</u>: ungedämpfter harmonischer Oszillator.
Ist $\tilde{\omega} = 0$ (d.h. keine äußere Kraft), so sind wir in Fall 3 (homogen. Problem), die Bewegung ist periodisch, die Auslenkung bleibt konstant.
Für $\tilde{\omega} \neq 0$, kann im Fall $\omega \neq \tilde{\omega}$ eine Schwebung auftreten, der Fall $\tilde{\omega} = \omega$ ist der Resonanzfall: An der Lösung des speziellen Problems lesen wir ab, dass die Amplitude linear in der Zeit wächst.
<u>Fall $\gamma > 0$</u>: gedämpfter harmonischer Oszillator.
Für $\tilde{\omega} = 0$, betrachte zunächst $\gamma^2 > 4\omega^2$ ("Kriechfall"): Starke Dämpfung, keine Oszillationen, die Amplitude klingt exponentiell ab. Ähnliches erhalten wir für $\gamma^2 = 4\omega^2$ ("aperiodischer Grenzfall"): es gibt höchstens ein Extremum, höchstens eine Nullstelle, etwas langsameres Abklingen der Amplitude ($\sim te^{-\gamma t}$).
Für $\gamma^2 < 4\omega^2$: kleine Dämpfung. Oszillationen treten auf, fallen exponentiall ab.
Für $\tilde{\omega} \neq 0$ schwingt das System nach einer gewissen Zeit im Wesentlichen mit der angeregten Frequenz $\tilde{\omega}$.

Aufgabe 3

a) Sei φ eine Lösung von $\varphi'' + \omega^2 \sin\varphi = 0$. Multipliziere die Gleichung mit φ':

$$\varphi'(t)\varphi''(t) + \omega^2 \sin(\varphi(t))\varphi'(t) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{d}{dt}\left[\tfrac{1}{2}(\varphi'(t))^2 - \omega^2 \cos(\varphi(t))\right] = 0$$

Also folgt $\frac{1}{2}(\varphi'(t))^2 - \omega^2 \cos(\varphi(t)) = const. = \frac{1}{2}(\varphi'(0))^2 - \omega^2 \cos(\varphi(0)) = \frac{1}{2}(\varphi'(0))^2 - \omega^2$.

b) Sei nun $\varphi'(0) > 2\omega$, $\varphi(0) = 0$. Mit a) folgt

$$(\varphi'(t))^2 = (\varphi'(0))^2 - 2\omega^2 + 2\omega^2 \cos(\varphi(t)) \geq (\varphi'(0))^2 - 2\omega^2 - 2\omega^2 = (\varphi'(0))^2 - 4\omega^2 > 0.$$

Also gilt $|\varphi'(t)| \geq \sqrt{(\varphi'(0))^2 - 4\omega^2}$ für alle $t \in [0, \infty)$. Wegen $\varphi'(0) > 0$ gilt (da $\varphi \in C^1[0,\infty)$): $\varphi'(t) \geq \sqrt{(\varphi'(0))^2 - 4\omega^2}$ und somit $\varphi(t) \geq \sqrt{(\varphi'(0))^2 - 4\omega^2}\, t$ (hier wurde auch $\varphi(0) = 0$ verwendet).

Damit gilt $\varphi(t) \to \infty$ für $t \to \infty$ und φ ist streng monoton wachsend. Insbesondere folgt: Es ex. genau ein $T > 0$ mit $\varphi(T) = 2\pi$.

Mit der Identität aus a) gilt:

$$(\varphi'(T))^2 - \omega^2 \underbrace{\cos(\varphi(T))}_{=1} = (\varphi'(0))^2 - \omega^2,$$

also $(\varphi'(T))^2 = (\varphi'(0))^2$ und wegen $\varphi'(T) > 0$: $\varphi'(T) = \varphi'(0)$.

Betrachte die Funktion $\tilde{\varphi}(t) = \varphi(t+T) - 2\pi$ $(t \in [0,\infty))$. Dann löst $\tilde{\varphi}$ das Anfangswertproblem

$$\tilde{\varphi}'' + \omega^2 \sin\tilde{\varphi} = 0, \quad \tilde{\varphi} = 0\ (= \varphi(0)),\ \tilde{\varphi}'(0) = \varphi'(0).$$

Aufgrund der eindeutigen Lösbarkeit dieses Problems folgt (φ ist ebenso eine Lösung): $\varphi(t) = \tilde{\varphi}(t),\ t \in [0,\infty)$. Dies beweist die Behauptung.

Bemerkung: In diesem Fall rotiert das Pendel

Berechnung der Periodendauer:

Setze $\psi = \varphi^{-1}$ (beachte, dass φ streng monoton wachsend ist, also ex. φ^{-1}). Für die Ableitung gilt

$$\begin{aligned}\psi'(y) &= [\varphi'(\psi(y))]^{-1} = \left[\sqrt{(\varphi'(0))^2 - 2\omega^2 + 2\omega^2\cos(\varphi(\psi(y)))}\right]^{-1}\\ &= \left((\varphi'(0))^2 - 4\omega^2\sin^2(\tfrac{y}{2})\right)^{-\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

(hierbei haben wir $-1 + \cos(y) = -2\sin^2(\frac{y}{2})$ benutzt). Es gilt nun

$$\begin{aligned}T &= \psi(\varphi(T)) - \underbrace{\psi(\varphi(0))}_{=0} = \int_0^{\varphi(T)} \psi'(y)\,dy = \int_0^{\varphi(T)} \frac{1}{\sqrt{(\varphi'(0))^2 - 4\omega^2\sin^2(\frac{y}{2})}}\,dy\\ &\overset{\varphi(T)=2\pi}{=} \frac{1}{\varphi'(0)} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4\omega^2}{(\varphi'(0))^2}\sin^2(\frac{y}{2})}}\,dy\end{aligned}$$

c) Im Fall $\varphi'(0) < 2\omega$: Pendel oszilliert um die Ruhelage. Im Fall $\varphi'(0) = 2\omega$ bewegt sich das Pendel (asymptotisch) zur Auslenkung $\varphi = \pi$, und hat dort (asymptotisch) die Geschwindigkeit 0.