Karlsruher Institut für Technologie (KIT) SS 2013
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
Dipl.-Math. Dagmar Roth

Rand- und Eigenwertprobleme
2. Übungsblatt

Aufgabe 4

Es sei

$$L[u] := \sum_{i=0}^{n} \sum_{\substack{\alpha_1,\ldots,\alpha_m \in \mathbb{N}_0 \\ \alpha_1+\ldots+\alpha_m = i}} a_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)}(x) \frac{\partial^i u}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_m^{\alpha_m}}(x)$$

ein linearer Differentialoperator.
Zeigen Sie: Ist L elliptisch in einem Punkt $x \in \mathbb{R}^m$, so folgt: n ist gerade oder $m = 1$.

Aufgabe 2

Es sei

$$L[u] = -\sum_{i,j=1}^{m} \hat{a}_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u$$

ein linearer Differentialoperator 2. Ordnung.

a) Schreiben Sie L wie in der Vorlesung als Summe über Multiindizes (s. auch Aufgabe 4).

b) Zeigen Sie: L ist elliptisch in $x \in \mathbb{R}^m$ genau dann, wenn $\hat{A}(x) := (\hat{a}_{ij}(x))_{i,j=1,\ldots,m}$ positiv oder negativ definit ist.

c) Welche Bedingung muss $\hat{A}$ erfüllen, damit L gleichmäßig streng elliptisch ist?

Aufgabe 3

a) Es sei $k \in \mathbb{N}$ und $L[u] = (-\Delta)^k u := \underbrace{(-\Delta) \circ \ldots \circ (-\Delta)}_{k \text{ mal}} u$. Zeigen Sie, dass L gleichmäßig streng elliptisch ist.

b) Sei $L[u] = \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right)$. Zeigen Sie, dass L ein quasilinearer elliptischer Differentialoperator ist.

c) Sei $L[u] = x_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + 2x_2 \frac{\partial u^2}{\partial x_1 \partial x_2} + x_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + (x_1^2 + x_2^2) \frac{\partial u}{\partial x_1} + (x_1^2 x_2) \frac{\partial u}{\partial x_2} + \sin(x_1 + x_2)u$.
Bestimmen Sie alle Punkte $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, in denen L elliptisch ist.