Karlsruher Institut für Technologie (KIT) SS 2013
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
Dipl.-Math. Dagmar Roth

Rand- und Eigenwertprobleme
Lösungsvorschläge zum 2. Übungsblatt

Aufgabe 4

Sei L elliptisch im Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^m$, d.h. für alle $\xi \in \mathbb{R}^m \backslash \{0\}$ gilt:

$$\sum_{\substack{\alpha_1,\dots,\alpha_m \in \mathbb{N}_0 \\ \alpha_1+\dots+\alpha_m=n}} a_{(\alpha_1,\dots,\alpha_m)}(x_0)\xi_1^{\alpha_1}\dots\xi_m^{\alpha_m} \neq 0.$$

Für ein festes $\xi_0 \in \mathbb{R}^m \backslash \{0\}$ definiere den Weg $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^m$ durch

$$\gamma(0) = \xi_0,\ \gamma(1) = -\xi_0.$$

Im Fall $m \geq 2$ fordere zusätzlich $\gamma(t) \neq 0$ für alle $t \in [0,1]$. Definiere weiter die Funktion

$$\phi(t) = \sum_{\substack{\alpha_1,\dots,\alpha_m \in \mathbb{N}_0 \\ \alpha_1+\dots+\alpha_m=n}} a_{(\alpha_1,\dots,\alpha_m)}(x_0)\gamma_1(t)^{\alpha_1}\dots\gamma_m(t)^{\alpha_m} \neq 0.$$

Es gilt $\phi \in C[0,1]$ (da γ als Weg stetig) und $\phi(0) = (-1)^n\phi(1)$. Falls n ungerade ist, so folgt mit dem Zwischenwertsatz die Existenz eines t_0 mit $\phi(t_0) = 0$. Aufgrund der Elliptizität von L folgt damit $\gamma(t_0) = 0$, Widerspruch für $m \geq 2$.

Aufgabe 5

a)

$$\begin{aligned}
L[u] &= -\sum_{i,j=1}^{m} \hat{a}_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u \\
&\overset{!}{=} \sum_{i=0}^{2} \sum_{\substack{\alpha_1,\dots,\alpha_m \in \mathbb{N}_0 \\ \alpha_1+\dots+\alpha_m=i}} a_{(\alpha_1,\dots,\alpha_m)}(x)\frac{\partial^i u}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_m^{\alpha_m}} \\
&= a_{(0,\dots,0)}(x)u + \left(a_{(1,0,\dots,0)}(x)\frac{\partial u}{\partial x_1} + a_{(0,1,0,\dots,0)}(x)\frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + a_{(0,\dots,0,1)}(x)\frac{\partial u}{\partial x_m}\right) \\
&\quad + \sum_{\substack{\alpha_1,\dots,\alpha_m \in \mathbb{N}_0 \\ \alpha_1+\dots+\alpha_m=2}} a_{(\alpha_1,\dots,\alpha_m)}(x)\frac{\partial^i u}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_m^{\alpha_m}}
\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert (e_j bezeichne den j-ten Einheitsvektor):

$$\begin{aligned}
a_{(0,\dots,0)}(x) &= c(x) \\
a_{e_j}(x) &= b_j(x) \\
a_{e_i+e_j}(x) &= \begin{cases} -\hat{a}_{ii} & i = j \\ -\hat{a}_{ij} - \hat{a}_{ji} & i \neq j,\ \text{da } \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} \text{ für } u \in C^2 \end{cases}
\end{aligned}$$

b) "⇐" Es sei $\hat{A}(x)$ positiv oder negativ definit. Es gilt also $\xi^T \hat{A}(x)\xi > 0$ oder $\xi^T \hat{A}(x)\xi < 0$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^m \backslash \{0\}$. Insbesondere gilt in beiden Fällen: $\xi^T \hat{A}(x)\xi \neq 0$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^m \backslash \{0\}$. Mit Hilfe von Teil a) folgt für alle $\xi \in \mathbb{R}^m \backslash \{0\}$:

$$\sum_{\substack{\alpha_1,\ldots,\alpha_m \in \mathbb{N}_0 \\ \alpha_1+\ldots+\alpha_m=2}} a_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)}(x)\xi_1^{\alpha_1}\ldots\xi_m^{\alpha_m}$$
$$= \sum_{i=1}^m -\hat{a}_{ii}(x)\xi_i^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^m (-\hat{a}_{ij}(x) - \hat{a}_{ji}(x))\xi_i\xi_j = -\sum_{i,j=1}^m \hat{a}_{ij}(x)\xi_i\xi_j = -\xi^T \hat{A}(x)\xi \neq 0.$$

Also ist L elliptisch in x.

"⇒" Sei nun L elliptisch in x, d.h. wie oben gilt $\xi^T \hat{A}(x)\xi \neq 0$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^m \backslash \{0\}$. Wir nehmen an, dass $\hat{A}(x)$ indefinit ist, d.h. es existieren $\eta, \zeta \in \mathbb{R}^m$ mit

$$\eta^T \hat{A}(x)\eta > 0, \quad \zeta^T \hat{A}(x)\zeta < 0.$$

Definiere einen Weg $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^m$ (insb. γ stetig) mit $\gamma(0) = \eta$, $\gamma(1) = \zeta$ und $\gamma(t) \neq 0$ für alle $t \in [0,1]$. (Bemerkung: $m > 1$, im Fall $m = 1$ ist die zu beweisende Aussage trivial). Definiere nun die Funktion

$$f(t) = (\gamma(t))^T \hat{A}(x)\gamma(t), \quad t \in [0,1].$$

Wegen $f(0) > 0 > f(1)$ folgt mit dem Zwischenwertsatz: Es ex. $t_0 \in (0,1)$ mit $f(t_0) = 0$, d.h.

$$(\gamma(t_0))^T \hat{A}(x)\gamma(t_0) = 0, \quad \gamma(t_0) \neq 0$$

ein Widerspruch zur Elliptizität des Operators!

c) L ist gleichmäßig streng elliptisch, falls $c_0 > 0$ existiert mit:

$$(-1)^{\frac{n}{2}} \sum_{\substack{\alpha_1,\ldots,\alpha_m \in \mathbb{N}_0 \\ \alpha_1+\ldots+\alpha_m=n}} a_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)}(x)\xi_1^{\alpha_1}\ldots\xi_m^{\alpha_m} \geq c_0|\xi|^n,$$

für alle x und $\xi \in \mathbb{R}^m$. Mit dem bereits Gezeigten und $n = 2$ ist dies äquivalent zu

$$-\sum_{i,j=1}^m (-\hat{a}_{ij}(x))\xi_i\xi_j = \xi^T \hat{A}(x)\xi \geq c_0|\xi|^2.$$

A muss also für alle x positiv definit sein, mit einer gleichmäßigen unteren Schranke c_0.

Aufgabe 6

a) Wegen $-\Delta u = \sum\limits_{i=1}^m \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ folgt $(-\Delta)\circ(-\Delta)u = \sum\limits_{i_1=1}^m \sum\limits_{i_2=1}^m \frac{\partial^4 u}{\partial x_{i_1}^2 \partial x_{i_2}^2}$ und analog

$$L[u] = (-\Delta)^k u = (-1)^k \sum_{i_1=1}^m \cdots \sum_{i_k=1}^m \frac{\partial^{2k} u}{\partial x_{i_1}^2 \ldots \partial x_{i_k}^2}.$$

L ist gleichmäßig streng elliptisch, falls $c_0 > 0$ existiert, so dass für alle $\xi \in \mathbb{R}^m \backslash \{0\}$ gilt:

$$(-1)^{\frac{2k}{2}}(-1)^k \underbrace{\sum_{i_1=1}^m \cdots \sum_{i_k=1}^m \xi_{i_1}^2 \ldots \xi_{i_k}^2}_{=\left(\sum\limits_{i=1}^m \xi_i^2\right)^k = |\xi|^{2k}} \geq c_0|\xi|^{2k}.$$

Dies ist für $c_0 = 1$ offenbar erfüllt.

b) Wir bringen den Differentialoperator auf die allg. Form in Aufgabe 2:

$$
\begin{aligned}
L[u] &= \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\frac{\partial u}{\partial x_i}}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\frac{1}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} - \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\sum\limits_{j=1}^{m}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}}{\left(\sqrt{1+|\nabla u|^2}\right)^3}\right) \\
&= \frac{1}{\left(\sqrt{1+|\nabla u|^2}\right)^3}\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\left(1+\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2\right) - \frac{\partial u}{\partial x_i}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) \\
&= \frac{1}{\left(\sqrt{1+|\nabla u|^2}\right)^3}\sum_{i,j=1}^{m}\hat{a}_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}
\end{aligned}
$$

wobei

$$
\hat{a}_{ij}(x) = \begin{cases} 1 + \sum\limits_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{m}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2, & i = j \\ -\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}, & i \neq j \end{cases}
$$

Wir können die Matrix $\hat{A}(x) = \left(\frac{\hat{a}_{ij}(x)}{\left(\sqrt{1+|\nabla u|^2}\right)^3}\right)_{i,j=1}^{m}$ auch folgendermaßen darstellen (I die Einheitsmatrix):

$$
\hat{A}(x) = \frac{1}{\left(\sqrt{1+|\nabla u|^2}\right)^3}\underbrace{\left(\left(1+|\nabla u|^2\right) I - \nabla u (\nabla u)^T\right)}_{=:M}.
$$

Offenbar gilt: $\xi^T \hat{A}(x)\xi = \frac{1}{\left(\sqrt{1+|\nabla u|^2}\right)^3}\xi^T M \xi$.

Die Eigenwerte von M sind gegeben durch: $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_{m-1} = 1 + |\nabla u|^2 > 0$ mit zugehörigem Eigenraum $E_{\lambda_1} = (\nabla u)^\perp$.
(Beachte, dass für $\psi \in (\nabla u)^\perp$ gilt: $M\psi = (1+|\nabla u|^2)\psi - \sum\limits_{i,j=1}^{m}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\psi_j = (1+|\nabla u|^2)\psi$.)

Für $\psi = \nabla u$ gilt: $M\psi = (1+|\nabla u|^2)\nabla u - \nabla u|\nabla u|^2 = \nabla u = \psi$, also folgt $\lambda_m = 1$. Die symmetrische Matrix M besitzt also nur positive Eigenwerte und ist somit positiv definit. Der Differentialoperator ist folglich elliptisch.

Da in $L[u]$ die Koeffizienten vor den Ableitungen der Ordnung 2 höchstens die Ordnung 1 haben, ist der Operator quasilinear.

Beachte: Die Eigenwerte von $\hat{A}$ sind somit $\frac{1}{\left(\sqrt{1+|\nabla u|^2}\right)^3}$ und $\frac{1}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}$. Diese sind i.A. nicht gleichmäßig von Null weg beschränkt (hängt vom Definitionsbereich des Operators ab), also ist der Operator i.A. nicht gleichmäßig streng elliptisch (das wurde in der Übung fälschlicherweise gesagt).

c) Der Hauptteil des Operators ist gegeben durch

$$
L_0[u] = \sum_{i,j=1}^{2}\hat{a}_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}
$$

wobei $\hat{a}_{11} = x_1,\ \hat{a}_{12} = \hat{a}_{21} = x_2, \hat{a}_{22} = x_1$. Die Matrix $\hat{A} = (\hat{a}_{ij})_{i,j=1}^2$ ist positiv oder negativ definit, falls $x_1 > 0$ und $x_1^2 - x_2^2 > 0$ oder $x_1 < 0$ und $x_1^2 - x_2^2 > 0$. Es muss also gelten: $x_1 \neq 0$ und $x_1^2 > x_2^2$, d.h. $|x_1| > |x_2|$.