Karlsruher Institut für Technologie (KIT) SS 2013
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
Dipl.-Math. Dagmar Roth

Rand- und Eigenwertprobleme
3. Übungsblatt

Aufgabe 7

Betrachten Sie das Sturm'sche Randwertproblem

$$\begin{aligned} -(p(x)u'(x))' + q(x)u(x) &= r(x), \quad x \in [0,1] \\ -\alpha_0 u'(0) + \gamma_0 u(0) &= \rho_0 \\ \alpha_1 u'(1) + \gamma_1 u(1) &= \rho_1 \end{aligned}$$

wobei $p \in C^1([0,1])$, $q \in C([0,1])$, $p(x) > 0,\ q(x) \geq 0$ für alle $x \in [0,1]$ gelte, sowie $\alpha_i, \gamma_i \geq 0$ und $\alpha_i^2 + \gamma_i^2 > 0$ $(i = 1,2)$ sei.

a) Zeigen Sie: Ist $q(x) \neq 0$ für mindestens ein $x \in [0,1]$ oder $\gamma_0 > 0$ oder $\gamma_1 > 0$, so besitzt das Randwertproblem für alle $r \in C([0,1])$ und $\rho_0, \rho_1 \in \mathbb{R}$ genau eine Lösung.

b) Diskutieren Sie die Lösbarkeit des Randwertproblems im Fall $q(x) = 0$ $(x \in [0,1])$, $\gamma_0 = \gamma_1 = 0$. Bestimmen Sie ggf. die allgemeine Lösung.

Aufgabe 8

Es sei $r \in C([0,1], \mathbb{R})$. Betrachten Sie das Randwertproblem

$$(*) \qquad -u''(x) = r(x) \quad x \in [0,1],\ u(0) = u(1) = 0.$$

Zeigen Sie mit Hilfe der Green'schen Funktion, dass für die Lösung von $(*)$ gilt:

$$\|u\|_\infty \leq \frac{1}{8}\|r\|_\infty, \qquad \|u'\|_\infty \leq \frac{1}{2}\|r\|_\infty.$$

Aufgabe 9

Diskutieren Sie in Abhängigkeit von $\alpha, \beta, \gamma, \lambda \in \mathbb{R}$ die Lösbarkeit des folgenden Randwertproblems und interpretieren Sie Ihre Ergebnisse im Sinne des Alternativsatzes:

$$\begin{aligned} u'''(x) - 4u''(x) + 5u'(x) - 2u(x) &= 0, \quad x \in [0,1] \\ \lambda u(0) - u'(0) &= \alpha \\ u'(0) - u''(0) &= \beta \\ u(1) - u'(1) &= \gamma. \end{aligned}$$

Besprechung in der Übung am 8.5.2013